

جزوه ریاضی نهم

همایش VIP آکادمی تیزهوشان

آکادمی تیزهوشان

مرجع تخصصی تیزهوشان و نمونه دولتی





۱) مجموعه‌ی $A = \{x | x^2 \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 4, x \in \mathbb{R}\}$ و $B = \{x^2 | x \in \mathbb{N}, x \leq 4\}$ مفروض است. مجموعه‌ی $A \cap B$ دارای چند زیرمجموعه می‌باشد؟

نمونه دولتی و تیزهوشان

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۲) اگر $A = \{3, 2x, 2 - y\}$ و $B = \{4, 2 + y, 1\}$ باشد و بدانیم $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ آنگاه $x + y$ کدام است؟

نمونه دولتی و تیزهوشان

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

۳) دو مجموعه‌ی $\{y, 8, z\}$ و $\{x, 3\}$ برابرند، بیشترین مقدار عبارت $x + y - z$ کدام است؟

نمونه دولتی و تیزهوشان

- ۸ (۱) ۱۳ (۲) ۱۷ (۳) ۱۹ (۴)

۴) یک تاس و ۳ سکه را با هم می‌اندازیم. احتمال آنکه تعداد دفعاتی که «رو» ظاهر می‌شود با عدد روی تاس برابر باشد، کدام است؟

نمونه دولتی و تیزهوشان

- $\frac{7}{48}$ (۱) $\frac{5}{48}$ (۲) $\frac{5}{36}$ (۳) $\frac{7}{36}$ (۴)

۵) در پرتاب دو تاس احتمال آن که مجموع دو عدد ظاهر شده بزرگتر از ۱۰ باشد، کدام است؟

نمونه دولتی و تیزهوشان

- $\frac{1}{6}$ (۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{1}{12}$ (۳) $\frac{5}{36}$ (۴)

۶) در مجموعه $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ چند زیرمجموعه می‌توان نوشت که a عضو آن باشد ولی b عضو نباشد؟

نمونه دولتی و تیزهوشان

- ۱۵ (۱) ۱۴ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴)

۷) در یک کلاس ۴۰ نفری، دانش‌آموزان حداقل یکی از زبان‌های فرانسه یا انگلیسی را می‌دانند. تعداد دانش‌آموزانی که زبان انگلیسی را می‌دانند ۲ برابر تعداد دانش‌آموزانی است که زبان فرانسه را می‌دانند و همچنین ۴ برابر تعداد دانش‌آموزانی است که هر دو زبان را می‌دانند. براین اساس تعداد دانش‌آموزانی که زبان انگلیسی را می‌دانند، چند نفر است؟

نمونه دولتی و تیزهوشان

- ۲۰ (۱) ۲۴ (۲) ۳۰ (۳) ۳۲ (۴)

۸) مجموعه A شامل تمام اعداد چهار رقمی است که حاصل ضرب رقم‌هایشان ۹ است. یکی از عضوهای این مجموعه را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه این عدد کوچکتر از ۳۰۰۰ باشد کدام است؟

نمونه دولتی و تیزهوشان

- $\frac{1}{2}$ (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{5}{6}$ (۴)

۹) مجموعه $A = \{x^y | x, y \in \mathbb{Z}, xy = 4\}$ چند عضو دارد؟

نمونه دولتی و تیزهوشان

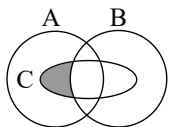
- ۳ تا (۱) ۴ تا (۲) ۸ تا (۳) ۷ تا (۴)

۱۰) اگر $A \subseteq B$ باشد، حاصل $(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$ کدام است؟

نمونه دولتی و تیزهوشان

- A (۱) B (۲) $B - A$ (۳) \emptyset (۴)

نمونه دولتی و تیزهوشان



۱۱) باتوجه به شکل مقابل کدام رابطه مربوط به قسمت رنگی است؟

- $(B - A) \cap (C - B)$ (۱) $(C - B) \cup A$ (۲) $(A - B) \cup (B \cap C)$ (۴) $(A \cap C) - (C \cap B)$ (۳)

نمونه دولتی و تیزهوشان

۱۲) تعداد ۴ سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه حداقل یک سکه "رو" ظاهر شود کدام است؟

- ① $\frac{12}{16}$ ② $\frac{13}{16}$ ③ $\frac{7}{8}$ ④ $\frac{15}{16}$

۱۳) اگر $n(A \cup B) = 9$ ، $n(A \cap B) = 2$ و $n(A - B) = 3$ باشد، تعداد عضوهای مجموعه حاصل از عبارت $(B - A)$ کدام است؟ قلم چی

- ① سه ② چهار ③ پنج ④ شش

۱۴) اگر $A = \{1, \{1\}, \{1, 2\}\}$ و $B = \{1, 2\}$ ، $C = \{1, \{1\}\}$ ، آنگاه کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست نمونه دولتی و تیزهوشان است؟

- ① $C \subseteq A$ ② $n(A \cap C) = 2$ ③ $A \cap B = \{1, 2\}$ ④ $(B - C) \cap A = \emptyset$

نمونه دولتی و تیزهوشان

۱۵) کدام یک از مجموعه‌های زیر، تهی است؟

- ① اعداد طبیعی کوچکتر از ۸ که مکعب کامل باشند. ② اعداد صحیح غیر مثبتی که مربعشان با خودشان برابر باشد.
③ اعداد طبیعی که مربعشان کوچکتر از خودشان باشد. ④ اعداد اول بین ۱۹ و ۲۹.

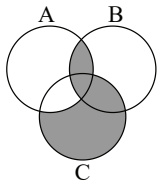
نمونه دولتی و تیزهوشان

۱۶) مجموعه $(A \cap B) \cup (B - A)$ با کدام مجموعه زیر، مساوی است؟

- ① $A \cup B$ ② \emptyset ③ A ④ B

نمونه دولتی و تیزهوشان

۱۷) کدام گزینه قسمت رنگ شده را نشان می‌دهد؟



نمونه دولتی و تیزهوشان

- ① $C - (A \cap C)$ ② $(A \cap B) \cup (C - A)$
③ $B \cap (A \cup C)$ ④ $(C \cup B) - (A \cap B)$

نمونه دولتی و تیزهوشان

۱۸) اگر $A \cap B = A$ و $C \subseteq A$ باشد حاصل عبارت زیر کدام است؟

$(A - B) \cup (C \cup B)$

- ① B ② C ③ $\{ \}$ ④ $C \cup A$

نمونه دولتی و تیزهوشان

۱۹) در پرتاب همزمان دو تاس، مجموع دو عدد را x می‌نامیم، احتمال آمدن کدام x بیشتر است؟

- ① ۵ ② ۶ ③ ۷ ④ ۸

نمونه دولتی و تیزهوشان

۲۰) باتوجه به مجموعه $K = \{a, b, c, d\}$ کدام گزینه صحیح است؟

- ① $\{a\} \in K$ ② $\emptyset \in K$ ③ $\{b\} \subseteq K$ ④ $K \subseteq \emptyset$

نمونه دولتی و تیزهوشان

۲۱) تعداد زیرمجموعه‌های $B = \{\{3\}, 4\}$ چند برابر زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $A = \{\{1, 2, 3, \dots, 10\}\}$ می‌باشد؟

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

نمونه دولتی و تیزهوشان

۲۲) تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $n + 3$ عضوی چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $n - 1$ عضوی است؟

- ① ۸ برابر ② ۳۲ برابر ③ $n + 2$ برابر ④ ۱۶ برابر

نمونه دولتی و تیزهوشان

۲۳) اگر از اعضای مجموعه B سه عضو کم کنیم، از تعداد زیرمجموعه‌های آن ۲۲۴ واحد کم می‌شود، مجموعه B چند عضو دارد؟

- ① ۹ ② ۱۰ ③ ۸ ④ ۱۱

نمونه دولتی و تیزهوشان

۲۴) دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که حاصل ضرب عددهای رو شده برابر ۱۲ شود؟

- ① $\frac{2}{36}$ ② $\frac{3}{36}$ ③ $\frac{4}{36}$ ④ $\frac{6}{36}$

نمونه دولتی و تیزهوشان

۲۵) باتوجه به مجموعه $\{\sqrt{n} | n \in \mathbb{N}\}$ ، کدام رابطه درست است؟

- ① $0 \in A$ ② $A \subseteq \mathbb{Q}'$ ③ $A - \mathbb{Q} = \emptyset$ ④ $\mathbb{N} \subseteq A$

نمونه دولتی و تیزهوشان

۲۶ در پرتاب دو تاس احتمال آنکه مجموع دو عدد رو شده برابر ۱۰ باشد، چقدر است؟

$\frac{1}{18}$ (۴)

$\frac{1}{6}$ (۳)

$\frac{1}{9}$ (۲)

$\frac{1}{12}$ (۱)

۲۷ در یک آزمایش تصادفی، فضای نمونه‌ای به صورت $s = \{2, 4, 6, 8\}$ است. چند پیشامد در این آزمایش دارای احتمال وقوع $\frac{3}{4}$ است؟

نمونه دولتی و تیزهوشان

۸ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

نمونه دولتی و تیزهوشان

۲۸ کدام عبارت یک مجموعه را مشخص می‌کند؟

عددهای طبیعی بین ۳ و ۴ (۴)

سه شهر ایران (۳)

پنج عدد بزرگتر از ۱۰۰ (۲)

چهار عدد فرد متوالی (۱)

۲۹ فرض کنید A_i نشان‌دهنده مجموعه مقسوم‌علیه‌های عدد i باشد، به عنوان مثال $A_6 = \{1, 2, 3, 6\}$ مجموعه‌ی

نمونه دولتی و تیزهوشان

چند عضو دارد؟ $A_{51} \cup A_{52} \cup \dots \cup A_{100}$

۳۷۷۵ عضو (۴)

۲۰۰ عضو (۳)

۱۰۰ عضو (۲)

۵۰ عضو (۱)

نمونه دولتی و تیزهوشان

۳۰ مجموعه $A = \{x \mid \frac{15}{x} \in \mathbb{Z}\}$ دارای چند عضو است؟

بی‌شمار (۴)

۸ (۳)

۴ (۲)

۱ (۱)

پاسخنامه تشریحی

۱ ۲ ۳ ۴ ۱
ابتدای اعضای دو مجموعه‌ی A و B را می‌نویسیم:

$$A = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}, \sqrt{16}\}$$

$$= \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, 3, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}, 4\}$$

$$B = \{1, 4, 9, 16\}$$

$$\Rightarrow A \cap B = \{1, 4\}$$

پس تعداد زیرمجموعه‌های $A \cap B$ برابر $2^2 = 4$ می‌شود.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲
هرگاه $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ در این صورت $A = B$ است. پس:

$$A = B$$

$$3 = 2 + y \Rightarrow y = 1$$

$$2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$x + y = 3$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳
برای این که مقدار $x + y - z$ بیشترین مقدار را داشته باشد x و y باید دارای بیشترین مقدار ممکن و z کمترین مقدار ممکن انتخاب شوند.

چون دو مجموعه برابرند، پس مجموعه‌ی $\{y, 8, z\}$ دارای یک عضو تکراری است پس برای y (بیشترین مقدار) $y = 8$ و برای z (کمترین مقدار) $z = 3$ و همچنین در مجموعه‌ی $\{x, 3\}$ برای x داریم: $x = 8$

$$\Rightarrow x + y - z = 8 + 8 - 3 = 13$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴
ابتدا تعداد کل حالت‌های پرتاب یک تاس و سه سکه را به دست می‌آوریم:

$$n(S) = 6 \times 2 \times 2 \times 2 = 48$$

حال مجموعه‌ی A را به صورت زیر در نظر می‌گیریم (شماره‌ی تاس برابر تعداد دفعات رو آمدن سکه‌ها):

$$A = \{(1, ر, پ, ر), (1, پ, ر, پ), (1, ر, ر, پ), (1, پ, پ, ر)\}$$

$$\text{و } \{(2, ر, ر, پ), (2, ر, پ, ر), (2, پ, ر, ر)\}$$

$$\text{و } \{(3, ر, ر, ر)\}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{7}{48}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵
تعداد همه‌ی حالت‌های ممکن در پرتاب دو تاس برابر است با: $n(S) = 6 \times 6 = 36$ و تعداد حالت‌هایی که مجموع دو تاس بزرگتر از ۱۰ باشد برابر است با:

$$A = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\} \Rightarrow n(A) = 3$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶
نکته: اگر A مجموعه‌ای n عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه‌هایی از A که شامل r عضو باشد و شامل q عضو نباشد، از رابطه‌ی 2^{n-r-q} به دست می‌آید.

در این سؤال مجموعه‌ی A دارای ۶ عضو است، حال تعداد زیرمجموعه‌هایی که عضو a را داشته باشند، ولی عضو b را نداشته باشند. (شامل یک عضو a باشد و شامل یک عضو b نباشد):

$$2^{6-1-1} = 2^4 = 16$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷
 A را مجموعه دانش‌آموزانی که فرانسه می‌دانند و B را دانش‌آموزانی که انگلیسی می‌دانند در نظر می‌گیریم.

$$\left. \begin{aligned} n(B) = 2n(A) &\Rightarrow n(A) = \frac{n(B)}{2} \quad (1) \\ n(B) = 4n(A \cap B) &\Rightarrow n(A \cap B) = \frac{n(B)}{4} \quad (2) \\ n(A \cup B) &= 40 \quad (3) \end{aligned} \right\}$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \xrightarrow{1, 2, 3} 40 = \frac{n(B)}{2} + n(B) - \frac{n(B)}{4}$$

$$\Rightarrow 40 = \frac{2n(B) + 4n(B) - n(B)}{4} \Rightarrow 40 = \frac{5n(B)}{4} \Rightarrow n(B) = \frac{4 \times 40}{5} = 32$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸
مجموعه‌ی همه حالت‌های ممکن (اعداد چهار رقمی که حاصل ضرب رقم‌هایشان ۹ است) برابر است با:

$$S = \{1119, 1191, 1911, 9111, 3311, 3131, 3113, 1331, 1133, 1313\} \Rightarrow n(S) = 10$$

اگر مجموعه‌ی A را مجموعه‌ی اعداد از S که از ۳۰۰۰ کوچکتر باشند در نظر بگیریم:

$A = \{1119, 1191, 1911, 1331, 1133, 1313\} \Rightarrow n(A) = 6$

$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

x	y	xy
1	4	4
2	2	4
4	1	4
-1	-4	4
-2	-2	4
-4	-1	4

ابتدا با توجه به راهبرد الگوسازی حالت‌های مختلف $xy = 4$ را به دست می‌آوریم:

$\rightarrow x^y = \{1^4, 2^2, 4^1, (-1)^{-4}, (-2)^{-2}, (-4)^{-1}\}$

$= \{1, 4, 4, 1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\} = \{1, 4, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\}$

$\rightarrow n(A) = 4$

1 2 3 4 10

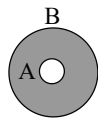
$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A(1)$

$A \subseteq B \Rightarrow A - B = \emptyset(2)$

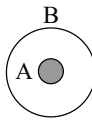
$\Rightarrow [(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)] \xrightarrow{(1),(2)} \emptyset \cup (B - A) \cup A$

$(B - A) \cup A = B$

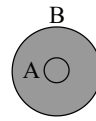
و باتوجه به نمودار ون:



B - A

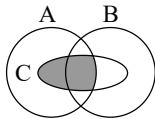


A

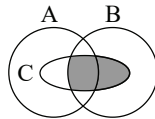


(B - A) ∪ A

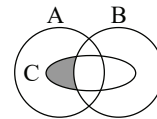
1 2 3 4 11



(A ∩ C)



(C ∩ B)

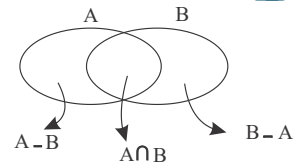


(A ∩ C) - (C ∩ B)

تعداد کل حالت‌های ممکن در پرتاب 4 سکه برابر $2^4 = 16$ است. احتمال اینکه هیچ سکه‌ای رو نیاید برابر $\frac{1}{16}$ است. پس احتمال اینکه حداقل یک سکه «رو» بیاید برابر است با: $1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

$1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

1 2 3 4 13



$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) \Rightarrow n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$
 $\Rightarrow 9 = 3 + 2 + n(B - A) \Rightarrow n(B - A) = 4$

بررسی گزینه‌ها: 1 2 3 4 14

گزینه 1: هر دو عضو مجموعه C در مجموعه A وجود دارد. پس $C \subseteq A$ و این گزینه درست می‌باشد.

$A \cap C = \{1, \{1\}\} \Rightarrow n(A \cap C) = 2$ درست

گزینه 3: نادرست زیرا: $A \cap B = \{1\}$

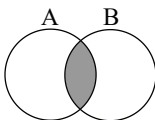
$B = C = \{2\} = (B - C) \cap A = \emptyset$ درست

گزینه 1: نتهی است 1 عدد طبیعی کوچکتر از 8 و مکعب کامل است. 1 2 3 4 15

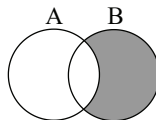
گزینه 2: نتهی است. عدد صفر عدد نامشبتی است که مربعش با خودش برابر است.

گزینه 4: نتهی است. عدد 23 عدد اول بین دو عدد 19 و 29 است.

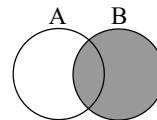
با استفاده از نمودار ون برای دو مجموعه A و B داریم: 1 2 3 4 16



A ∩ B

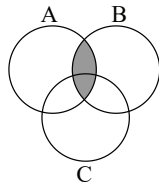


B - A

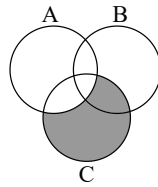


(A ∩ B) ∪ (B - A)

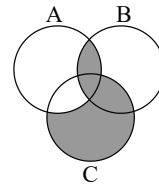
باتوجه به نمودار ون داریم: 1 2 3 4 17



$A \cap B$



$C - A$



$(A \cap B) \cup (C - A)$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸

$$\left. \begin{matrix} A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B \\ C \subseteq A \end{matrix} \right\} \Rightarrow C \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B \quad (1)$$

$$A \subseteq B \Rightarrow A - B = \emptyset \quad (2)$$

$$\Rightarrow (A - B) \cup (C \cup B) \xrightarrow{(1), (2)} \emptyset \cup B = B$$

تعداد کل حالت‌ها برای گزینه‌ها برابر است پس تعداد حالت‌های مجموع دو عدد را برای گزینه‌ها بررسی می‌کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹

گزینه ۱: ۴ حالت $\Rightarrow \{(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ (مجموع دو عدد برابر ۵ باشد) $x = 5$

گزینه ۲: ۵ حالت $\Rightarrow \{(1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3)\}$ (مجموع دو عدد برابر ۶ باشد) $x = 6$

گزینه ۳: ۶ حالت $\Rightarrow \{(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\}$ (مجموع دو عدد برابر ۷ باشد) $x = 7$

گزینه ۴: ۵ حالت $\Rightarrow \{(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)\}$ (مجموع دو عدد برابر ۸ باشد) $x = 8$

پس بیشترین حالت ممکن برای $x = 7$ است. یعنی مجموع دو عدد رو شده برابر ۷ باشد دارای احتمال بیشتری نسبت به سایر گزینه‌ها است.

چون $b \in K$ (عضو K) است در نتیجه $\{b\} \subseteq K$ (زیرمجموعه K) است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۱

$$\begin{aligned} n(B) = 2 & \text{ زیرمجموعه‌ها } = 2^2 = 4 \Rightarrow \frac{4}{2} = 2 \\ n(A) = 1 & \text{ زیرمجموعه‌ها } = 2^1 = 2 \end{aligned}$$

تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌های $n + 3$ عضو برابر 2^{n+3} و تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه $n - 1$ عضو برابر 2^{n-1} است در نتیجه ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۲

$$\frac{2^{n+3}}{2^{n-1}} = 2^{n+3} \div 2^{n-1} = 2^{n+3-n+1} = 2^4 = 16$$

n را تعداد عضوهای مجموعه B در نظر می‌گیریم پس تعداد زیرمجموعه‌های آن برابر 2^n می‌شود. اگر سه واحد از اعضای آن کم شود $(n - 3)$ تعداد ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۳

زیرمجموعه‌های آن ۲۲۴ واحد کم می‌شود. پس:

$$2^n - 2^{n-3} = 224 \Rightarrow 2^n \left(1 - \frac{1}{8}\right) = 224$$

$$\Rightarrow 2^n \left(\frac{7}{8}\right) = 224 \Rightarrow 2^n = 224 \div \frac{7}{8} = 224 \times \frac{8}{7} = 256$$

$$\Rightarrow 2^n = 256 \Rightarrow 2^n = 2^8 \Rightarrow n = 8$$

تعداد اعضای مجموعه B برابر ۸ است.

در پرتاب دو تاس تعدد کل حالت‌های ممکن برابر $6 \times 6 = 36$ است. حال حالت‌هایی را که ضرب دو عدد تاس ۱۲ می‌شود، بررسی می‌کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۴

$$\left\{ \left(\begin{matrix} \text{تاس دوم} \\ 2 \\ \text{تاس اول} \end{matrix} \right), (3, 4), (4, 2), (4, 3) \right\}$$

پس احتمال آن برابر است با: $\frac{4}{36}$

ابتدا اعضای مجموعه A را مشخص می‌کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۵

$$A = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \dots\}$$

بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱: باتوجه به مجموعه بالا، صفر عضو آن نیست.

گزینه ۲: $A \subseteq Q'$ نیست، چون اعضای گویا نیز در مجموعه A وجود دارد.

گزینه ۳: چون A زیرمجموعه اعداد گویا (Q) نیست، پس $A - Q \neq \emptyset$.

گزینه ۴: پاسخ درست است: $N \subseteq A$.

فضای نمونه‌ای پرتاب دو تاس برابر $6 \times 6 = 36$ ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۶

حال حالت‌هایی که در پرتاب دو تاس مجموع ۱۰ داریم را می‌نویسیم و با مجموعه A نشان می‌دهیم.

$$A = \{(4, 6), (6, 4), (5, 5)\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

۲۷) در این آزمایش مقدار $n(S) = 4$ و پیشامدهایی که احتمال وقوع آنها $\frac{3}{4}$ است، در واقع زیرمجموعه‌های ۳ عضوی از مجموعه ۴ عضوی (S) است. تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی این مجموعه را می‌نویسیم.

$\{2, 4, 6\}, \{2, 4, 8\}, \{4, 6, 8\}, \{2, 6, 8\}$

پس تعداد این پیشامدها برابر ۴ است.

۲۸) اعضای مجموعه‌های گزینه‌های ۱ و ۲ و ۳ مشخص و متمایز نیست، پس نشان‌دهنده یک مجموعه نمی‌باشد. ولی گزینه ۴ مجموعه‌ای تهی است و نشان‌دهنده یک مجموعه است.

۲۹) مجموعه مقسوم‌علیه‌های اعداد ۱ تا ۱۰۰، حتماً شامل خود این اعداد می‌باشند همچنین اعداد ۱ تا ۵۰ نیز هر کدام مقسوم‌علیه اعداد ۱ تا ۱۰۰ هستند پس در کل این مجموعه ۱۰۰ عضو دارد.

۳۰) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30\}$

$$\frac{15}{x} \rightarrow \begin{cases} \frac{15}{+1} = 15 \in \mathbb{Z} \rightarrow \frac{15}{-1} = -15 \in \mathbb{Z} \\ \frac{15}{+3} = 5 \in \mathbb{Z} \rightarrow \frac{15}{-3} = -5 \in \mathbb{Z} \\ \frac{15}{+5} = 3 \in \mathbb{Z} \rightarrow \frac{15}{-5} = -3 \in \mathbb{Z} \\ \frac{15}{+15} = 1 \in \mathbb{Z} \rightarrow \frac{15}{-15} = -1 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

از طرفی کسرهایی به صورت $\frac{1}{a}$ که $a \in \mathbb{N}$ نیز حاصل کسر را صحیح می‌کند. در نتیجه مجموعه‌ی فوق بی‌شمار عضو دارد.

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴

۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴

۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴

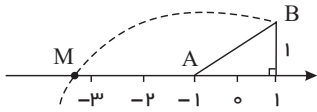
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴



۱ حاصل عبارت $|4 - \sqrt{20}| - 2\sqrt{(\sqrt{5} - 3)^2}$ برابر کدام گزینه است؟

- ۱) -۲ ۲) ۲ ۳) $2\sqrt{5} - 2$ ۴) $4\sqrt{5} - 10$

۲ به مرکز A و شعاع AB کمانی زده‌ایم تا محور را در نقطه‌ی M قطع کند. نقطه‌ی M چه عددی را نمایش می‌دهد؟



- ۱) $\sqrt{5} - 1$ ۲) $-1 - \sqrt{5}$ ۳) $-3 + \sqrt{5}$ ۴) $-3 - \sqrt{5}$

۳ کدام گزینه صحیح است؟

- ۱) مربع هر عدد صحیح، عددی طبیعی است. ۲) هر عدد مرکب، عددی حقیقی است.
۳) حاصل جمع دو عدد گنگ، نمی‌تواند عددی گویا باشد. ۴) اگر هر عدد اولی را با یک جمع کنیم، عددی مرکب می‌شود.

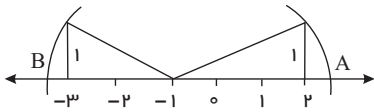
۴ اگر $a < b$ ، $x = \frac{a+b}{2}$ حاصل عبارت $|a-x| + |x-b|$ کدام است؟

- ۱) $2x - a - b$ ۲) $b - a$ ۳) $a + b - 2x$ ۴) $b + a$

۵ کدام یک از گزینه‌ها نادرست است؟

- ۱) هر عدد صحیح، عددی است گویا. ۲) اگر n مجذور کامل نباشد، \sqrt{n} گویا نیست. (n عددی طبیعی است).
۳) ۱۵ عدد صحیح بین $5\sqrt{3}$ و $3\sqrt{5}$ وجود دارد. ۴) دو کسر وقتی با هم برابرند که صورت‌ها با هم و مخرج‌ها با هم برابر باشند.

۶ در شکل زیر فاصله‌ی نقطه‌ی A تا B برابر است با:



- ۱) $\sqrt{10} - \sqrt{5}$ ۲) $\sqrt{5} - \sqrt{10}$ ۳) $\sqrt{10} + \sqrt{5}$ ۴) $-\sqrt{10} - \sqrt{5}$

۷ اگر $\sqrt{a^2 + 3} + a = 4$ باشد، حاصل $2\sqrt{a^2 + 3} - 2a$ چیست؟

- ۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۸ کدام یک از اعداد زیر بین $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\frac{\sqrt{3}}{3}$ قرار دارد؟

- ۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{5}{11}$ ۴) $\frac{9}{11}$

۹ اگر $a = \frac{24}{19} + \frac{25}{21} + \frac{29}{23}$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $=? \frac{5}{19} + \frac{4}{21} + \frac{6}{23}$ به صورت جبری کدام گزینه است؟

- ۱) $a + 1$ ۲) $a - 2$ ۳) $a - 3$ ۴) $a - 4$

۱۰ چند تا از جمله‌های زیر درست است؟
 هر عدد اعشاری غیر مختوم، یک عدد گنگ است.
 عددی وجود دارد که صحیح باشد ولی گویا نباشد.
 حاصل جمع دو عدد گنگ، همواره یک عدد گنگ است.
 مساحت مستطیلی به ابعاد \sqrt{x} و \sqrt{y} همواره عددی اصم است.

- سه تا ① دو تا ② یکی ③ هیچکدام ④

۱۱ کدام یک از اعداد زیر گنگ است؟

- ① $\sqrt{1,69}$ ② $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ ③ $\sqrt{3}+1$ ④ $-\sqrt{2^2}+1$

۱۲ کدام کسر با عدد اعشاری $5,66000$ برابر است؟

- ① $\frac{19}{3}$ ② $\frac{17}{3}$ ③ $\frac{16}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$

۱۳ کدام یک بین دو کسر $\frac{7}{22}$ و $\frac{3}{21}$ واقع است؟

- ① $\frac{5}{43}$ ② $\frac{10}{43}$ ③ $\frac{3}{43}$ ④ $\frac{4}{43}$

۱۴ طول و عرض یک مستطیل اعدادی گنگ هستند. در مورد این مستطیل کدام گزینه درست است؟

- ① مساحت این مستطیل همواره عددی گویا است.
 ② محیط این مستطیل همواره عددی گنگ است.
 ③ محیط این مستطیل می‌تواند گنگ یا گویا باشد.
 ④ جذر مساحت این مستطیل همواره عددی گنگ است.

۱۵ اگر $0 < y < x$ و $|y| > |x|$ آنگاه حاصل $|x+y| + |x| + |y|$ برابر است با:

- ① $-2y$ ② $-2x$ ③ $2x$ ④ $2y$

۱۶ به ازای چند مقدار طبیعی n حاصل $\frac{\sqrt{5-n}}{n^2-3n+2}$ عدد حقیقی است؟

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۱۷ حاصل عبارت $2\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \div \frac{3}{8}$ ، برابر است با:

- ① -6 ② $\frac{13}{24}$ ③ -20 ④ $-\frac{15}{48}$

۱۸ عدد $\sqrt{29}$ عضو کدام مجموعه است؟

- ① $\{x \in \mathbb{R} | x < 5\}$ ② $\{x \in \mathbb{R} | -x > -6\}$ ③ $\{x \in \mathbb{Q} | x < 6\}$ ④ $\{x \in \mathbb{R} | -x > 5\}$

۱۹ حاصل عبارت $\frac{1 + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1 + \frac{1}{2}}{2}} \div \frac{3}{1 - \frac{2}{1 - \frac{1}{2}}}$ کدام است؟

- ① $\frac{95}{24}$ ② $\frac{15}{6}$ ③ $\frac{47}{12}$ ④ $\frac{19}{8}$

۲۰ چندتا از اعداد زیر گویا است؟

(الف) $\frac{\pi + 1}{2}$

(ج) $\frac{3\pi + 3}{2\pi + 2}$

(ب) $\sqrt{\frac{9}{3}}$

(د) $\sqrt{10}$

۱ یکی

۲ دوتا

۳ سه تا

۴ هر چهارتا

۲۱ کدام عدد به مجموعه اعداد گنگ تعلق دارد؟ (نگاه به گذشته)

۱ $\sqrt{0.09}$

۲ $\sqrt{0.64}$

۳ $\sqrt{0.9}$

۴ $\sqrt{1.21}$

۲۲ حاصل کسر $\frac{a + \frac{1}{a}}{a + \frac{1}{a}}$ به ازای $a = \frac{3}{2}$ کدام است؟

۱ $\frac{169}{153}$

۲ $\frac{26}{17}$

۳ $\frac{18}{22}$

۴ $\frac{13}{22}$

۲۳ به ازای کدام مقدار a ، عدد گویای $\frac{a}{20}$ بین $\frac{1}{2}$ و $\frac{2}{5}$ قرار می‌گیرد؟

۱ ۱۱

۲ ۹

۳ ۷

۴ ۳

۲۴ حاصل $\sqrt{0.111\dots}$ کدام است؟ (المپیاد بلژیک و فرانسه و هلند مرحله دوم ۱۳۸۰)

۱ $0.111\dots$

۲ $0.222\dots$

۳ $0.333\dots$

۴ $0.444\dots$

۲۵ حاصل $\frac{1 + \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} \div \frac{-1 - \frac{3}{4}}{-1 + \frac{3}{4}}$ کدام است؟

۱ $\frac{7}{4}$

۲ $\frac{1}{4}$

۳ ۱

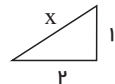
۴ -۱

پاسخنامه تشریحی

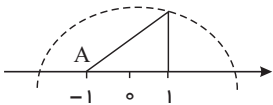
چون $\sqrt{20}$ بزرگتر از ۴ است پس عبارت $|4 - \sqrt{20}|$ منفی و چون $\sqrt{5}$ کوچکتر از ۳ است $|\sqrt{5} - 3|$ منفی است. پس:

$$|4 - \sqrt{20}| - 2|\sqrt{5} - 3| = -4 + \sqrt{20} - 2(-\sqrt{5} + 3) \\ = -4 + \sqrt{20} + 2\sqrt{5} - 6 = -4 + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 6 = +4\sqrt{5} - 10$$

وتر یک مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم ۱ و ۲:

$$x^2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5 \rightarrow x = \sqrt{5}$$


که در شکل مقابل این وتر به سمت منفی کمان زده شده و مبدأ آن ۱- می‌باشد پس $1 - \sqrt{5}$ را نشان می‌دهد.



اعداد مرکب را از بین اعداد طبیعی انتخاب می‌کنیم و اعداد طبیعی هم زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی هستند.

بررسی سایر گزینه‌ها: در گزینه‌ی «۱» صفر حکم را نقض می‌کند. در گزینه‌ی «۳» اعداد $-\sqrt{2}$ و $+\sqrt{2}$ هر دو گنگ هستند. اما مجموعه‌شان گویاست ($-\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$) در گزینه‌ی «۴» هم $1 + 2 = 3$ که اول است و حکم را نقض می‌کند.

توجه: به زبان ساده نقض کردن یک حکم یعنی نادرستی یک عبارت کلی را (با یک مثال) نشان دادن.

باتوجه به اینکه $x = \frac{a+b}{2}$ مقدار x میانگین a و b است و چون $a < b$ ، در این صورت $x < b$ و $a < x$ ، در این صورت:

$$|a - x| \underline{a - x < 0} \quad - (a - x) = -a + x \quad (1)$$

$$|x - b| \underline{x - b < 0} \quad - (x - b) = -x + b \quad (2)$$

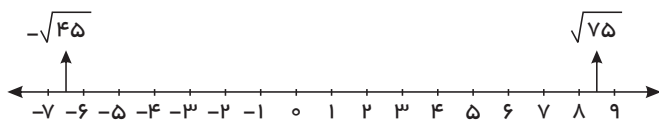
باتوجه به رابطه‌های (۱) و (۲) داریم:

$$|a - x| + |x - b| = -a + x + (-x) + b = -a + b = b - a$$

گزینه ۱: درست است. چون اعداد صحیح زیرمجموعه‌ای از اعداد گویا است و هر عدد صحیح عددی گویا نیز هست. گزینه ۲: درست است. برای \sqrt{n} ، $n \in \mathbb{N}$ گویا است، اگر n مجذور کامل باشد و \sqrt{n} گنگ است اگر n مجذور کامل نباشد. گزینه ۳: درست است.

$$-3\sqrt{5} = -\sqrt{45} \\ 5\sqrt{3} = \sqrt{75}$$

این دو عدد را به طور تقریبی روی محور نمایش می‌دهیم.



پس اعداد صحیح بین $-\sqrt{45}$ و $\sqrt{45}$ ، ۱۵ تا است. گزینه ۴: نادرست است. چون این کسرها با هم برابرند، ولی صورت‌ها و مخرج‌هایشان با هم برابر نیست.

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶

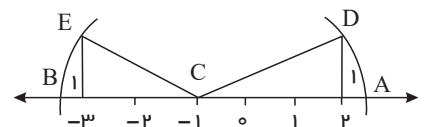
$$CD^2 = 3^2 + 1^2 \rightarrow CD^2 = 9 + 1 = 10 \rightarrow CD = \sqrt{10}$$

$$CA = x_A - x_C \rightarrow \sqrt{10} = x_A - (-1) \rightarrow \sqrt{10} = x_A + 1 \rightarrow x_A = \sqrt{10} - 1$$

$$CE^2 = 2^2 + 1^2 \rightarrow CE^2 = 4 + 1 = 5 \rightarrow CE = \sqrt{5}$$

$$BC = x_C - x_B \rightarrow \sqrt{5} = -1 - x_B \rightarrow x_B = -1 - \sqrt{5}$$

$$AB = x_A - x_B = (\sqrt{10} - 1) - (-1 - \sqrt{5}) = \sqrt{10} - 1 + 1 + \sqrt{5} = \sqrt{10} + \sqrt{5}$$



۷) به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{a^2 + 3} + a = 4 \Rightarrow \sqrt{a^2 + 3} = 4 - a$$

$$(\sqrt{a^2 + 3})^2 = (4 - a)^2 \Rightarrow \sqrt{(a^2 + 3)^2} = (4 - a)^2$$

$$\Rightarrow |a^2 + 3| = 16 - 8a + a^2$$

$$\Rightarrow a^2 + 3 = 16 - 8a + a^2 \Rightarrow 8a = 13 \Rightarrow a = \frac{13}{8}$$

$a^2 + 3$ همواره مثبت است:

از طرفی:

$$2\sqrt{a^2 + 3} - 2a, \quad \sqrt{a^2 + 3} = 4 - a \Rightarrow 2(4 - a) - 2a$$

$$= 8 - 2a - 2a$$

$$= 8 - 4a$$

$$= 8 - 4 \times \frac{13}{8} = 8 - \frac{13}{2} = \frac{3}{2}$$

۸) ابتدا دو عدد $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و $\frac{\sqrt{6}}{2}$ را به صورت تقریبی می‌نویسیم.

$$\frac{\sqrt{6}}{2} \approx \frac{2.45}{2} \approx 0.7$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx \frac{1.73}{3} \approx 0.56$$

حال گزینه‌ها را به صورت اعشاری می‌نویسیم (با تقریب دو رقم اعشار):

$$\text{گزینه ۱: } \frac{3}{4} = 0.75$$

$$\text{گزینه ۳: } \frac{5}{11} \approx 0.45$$

$$\text{گزینه ۲: } \frac{3}{5} = 0.6$$

$$\text{گزینه ۴: } \frac{9}{11} \approx 0.81$$

پس گزینه ۲ بین $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و $\frac{\sqrt{6}}{2}$ قرار دارد.

۹) کسرهای بزرگ‌تر از واحد را به صورت عدد مخلوط نمایش می‌دهیم:

$$\frac{24}{19} + \frac{25}{21} + \frac{29}{23} = a$$

$$\Rightarrow 1\frac{5}{19} + 1\frac{4}{21} + 1\frac{4}{23} = a$$

$$\Rightarrow (1+1+1) + \left(\frac{5}{19} + \frac{4}{21} + \frac{4}{23}\right) = a$$

$$\Rightarrow \frac{5}{19} + \frac{4}{21} + \frac{4}{23} = a - 3$$

۱۰) چون اعداد اعشاری متناوب ساده مرکب را می‌توان به صورت عدد گویا نوشت، پس عبارت اول غلط است.

عبارت دوم به دلیل اینکه تمام اعداد صحیح حتماً گویا هستند غلط است.

برای عبارت سوم می‌توان این مثال نقض را آورد که جمع آن‌ها یک عدد گویاست $2 = (1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})$.

برای عبارت آخر نیز اگر $x = 8$ و $y = 2$ فرض شود ضرب آن‌ها عددی گویا می‌شود نه گنگ:

$$\sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$$

۱۱) ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱

$$\text{گویا ۱: } \sqrt{1.69} = \sqrt{\frac{169}{100}} = \frac{13}{10}$$

$$\text{گویا ۲: } \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{گویا ۴: } -\sqrt{2^2} + 1 = -2 + 1 = -1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲

$$5,666\dots = 5,6\bar{6}$$

$$10A = 56,6\bar{6} \Rightarrow 10A - A = 9A = 51$$

$$A = \frac{51}{9} = \frac{17}{3}$$

۱۳ چون $\frac{7}{22}$ بزرگتر از $\frac{3}{11}$ است پس می‌توان نوشت کسر $\frac{7+3}{21+22}$ بین دو کسر قرار دارد. یعنی گزینه‌ی دوم $\frac{10}{33}$ در سایر گزینه‌ها با مثال: $x =$ طول و $y =$ عرض

۱۴

(۱) $x = \sqrt{3}$ $y = \sqrt{2} \rightarrow S = x.y = \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6} \notin Q$

(۲) $x = 1 - \sqrt{2}$, $y = 1 + \sqrt{2}$ $p = 2(x + y) = 2(1 - \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2}) = 2 \times 2 = 4$

(۴) $x = \sqrt{8}$ $y = \sqrt{2} \rightarrow S = \sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4 \rightarrow \sqrt{S} = 2 \notin Q'$

۱۵ باتوجه به فرض سؤال که $0 < y$ و $x < 0$ و همچنین $|y| > |x|$ پس y مثبت و x منفی است و چون y از x بزرگتر است پس $x + y$ مثبت است.

$$|x + y| + |x| + |y| = x + y - x + y = 2y$$

۱۶ نکته: اعداد منفی نمی‌توانند زیر رادیکال با فرجه زوج قرار بگیرند.

پس در این سؤال: $0 \leq n \leq 5$ لذا: $n \leq 5$

در نتیجه: $n = 1, 2, 3, 4, 5$

همچنین ریشه‌های مخرج را نیز باید کم کنیم:

ریشه‌های مخرج ۱ و ۲:

$$n^2 - 3n + 2 = 0 \Rightarrow (n - 1)(n - 2) = 0$$

پس n فقط می‌تواند مقدارهای ۵ و ۴ و ۳ را داشته باشد تا حاصل یک عدد حقیقی باشد.

۱۷ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \div \frac{3}{8} = \frac{7}{3} - \frac{1}{4} \times \frac{8}{3} = \frac{7}{3} - \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{1}{3} \div 3 \times 5 - \frac{5}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 5 - \frac{5}{6} = \frac{5}{9} - \frac{5}{6} = \frac{10 - 15}{18} = \frac{-5}{18}$$

در نتیجه حاصل کل کسر برابر است با:

$$\frac{\frac{5}{3}}{\frac{-5}{18}} = \frac{5}{3} \times \frac{-18}{5} = -6$$

۱۸ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\sqrt{25} < \sqrt{29} < \sqrt{36} \Rightarrow 5 < \sqrt{29} < 6$$

$$-x > -6 \xrightarrow{\times(-1)} x < 6$$

عدد $\sqrt{29}$ عضو مجموعه $\{x \in \mathbb{R} \mid -x > -6\}$ می‌باشد.

۱۹ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{1 + \frac{1}{2}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{1 + \frac{3}{2}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{1 + \frac{4}{3}}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{1 + \frac{5}{4}}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{1 + \frac{5}{4}}{\frac{2}{5}} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{2}{5}} = \frac{9 \times 5}{4 \times 2} = \frac{45}{8}$$

۲۰ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{3\pi + 3}{2\pi + 2} = \frac{3(\pi + 1)}{2(\pi + 1)} = \frac{3}{2}$$

در مورد ج، داریم:

که $\frac{3}{2}$ عددی گویا است.

اما در سایر موارد، هر سه عدد عددی غیر گویا هستند. در مورد (الف) صورت کسر غیر گویا و مخرج گویا است، پس عدد، عددی غیر گویا است. مورد (ب) برابر $\sqrt{3}$ و مورد (د) یعنی $\sqrt{10}$ هر دو عددهایی غیر گویا هستند.

۲۱ $\sqrt{0,9}$ گنگ است چرا که $0,9$ توان دوم هیچ عدد گویایی نیست.

$$\sqrt{0,09} = 0,3$$

$$\sqrt{0,64} = 0,8$$

$$\sqrt{1,21} = 1,1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۲

$$a + \frac{1}{\frac{1}{a}} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} + \frac{1}{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{2}{3}}{\frac{3}{2} + \frac{2}{3}} = \frac{3}{\frac{51}{6}} = \frac{36}{17}$$

روش اول: ابتدا میانگین دو عدد $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{5}$ را به دست می‌آوریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۳

$$\frac{\frac{1}{3} + \frac{2}{5}}{2} = \frac{\frac{5+6}{15}}{2} = \frac{11}{30} = \frac{9}{20}$$

با توجه به اینکه میانگین دو عدد همواره بین آن دو عدد قرار دارد و $\frac{a}{20}$ نیز دارای مخرج ۲۰ است. بنابراین:

$$a = 9$$

روش دوم: ابتدا مخرج هر کسر $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{5}$ را به ۲۰ تبدیل می‌کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{3} \times \frac{10}{10} = \frac{10}{30} \\ \frac{2}{5} \times \frac{4}{4} = \frac{8}{20} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{10}{30} < \frac{a}{20} < \frac{8}{20} \Rightarrow a = 9$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۴

$$x = \sqrt[3]{1}$$

$$-1 \circ x = \sqrt[3]{1}$$

$$9x = 1$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$\sqrt[3]{0,1} = \sqrt[3]{\frac{1}{1000}} = \frac{1}{10} = 0,1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۵

$$\frac{1 + \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} \div \frac{-1 - \frac{3}{4}}{-1 + \frac{3}{4}} = \frac{\frac{4+3}{4}}{\frac{4-3}{4}} \div \frac{\frac{-4-3}{4}}{\frac{-4+3}{4}} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{1}{4}} \div \frac{\frac{-7}{4}}{\frac{-1}{4}} = \frac{7}{1} = 7$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴

۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴

۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴

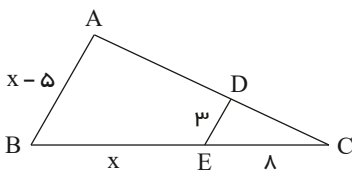
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴



۱ کدام گزینه نادرست است؟

- ۱ تمام مربع‌ها با هم متشابه‌اند.
- ۲ تمام مثلث‌های متساوی‌الاضلاع با هم متشابه‌اند.
- ۳ تمام لوزی‌ها با هم متشابه‌اند.
- ۴ تمام مثلث‌های متساوی‌الساقین که یک زاویه مجاور قاعده مساوی دارند با هم متشابه‌اند.

۲ در شکل مقابل AB موازی DE می‌باشد، مقدار x کدام است؟



- ۱ ۸
- ۲ ۱۱
- ۳ ۱۶٫۸
- ۴ ۱۲٫۸

۳ اگر نسبت تشابه دو مثلث $\frac{3}{4}$ باشد، نسبت مساحت‌هایشان کدام است؟

- ۱ $\frac{3}{4}$
- ۲ $\frac{9}{16}$
- ۳ $\frac{3}{8}$
- ۴ $\frac{9}{32}$

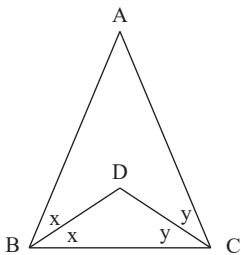
۴ طول اضلاع مثلثی ۱۲، ۱۷، ۲۱ سانتی‌متر است. این مثلث با مثلث دیگری که محیط آن ۲۰ سانتی‌متر می‌باشد متشابه است. طول کوچکترین ضلع مثلث کوچکتر کدام است؟

- ۱ ۲٫۴
- ۲ ۳٫۴
- ۳ ۴٫۸
- ۴ ۴٫۲

۵ دو زاویه A و B مکمل هستند و زاویه A از سه برابر زاویه B ، ۲۰ درجه کم‌تر است. زاویه B چند درجه است؟

- ۱ 40°
- ۲ 45°
- ۳ 50°
- ۴ 55°

۶ باتوجه به شکل زیر اندازه زاویه BDC چند درجه است؟ ($\hat{A} = 42^\circ$)



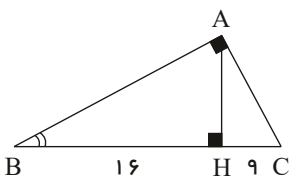
- ۱ ۱۱۱
- ۲ ۱۳۸
- ۳ ۶۹
- ۴ ۱۲۰

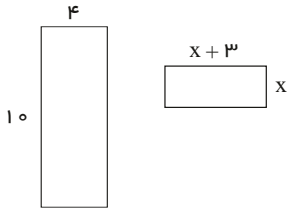
۷ اگر نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه $\frac{48}{27}$ باشد، نسبت محیط‌های آنها کدام است؟

- ۱ $\frac{3}{4}$
- ۲ $\frac{4}{3}$
- ۳ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
- ۴ $\frac{48}{27}$

۸ ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم‌الزاویه ABC است. محیط مثلث ABC است؟

- ۱ ۳۷
- ۲ ۴۷
- ۳ ۶۰
- ۴ ۷۵



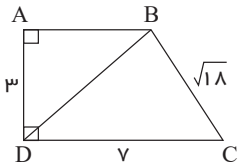


۹ دو مستطیل زیر متشابه‌اند. مساحت مستطیل کوچک چند واحد مربع است؟

- ۱) ۲
۲) ۱۸
۳) ۲۰
۴) ۱۰

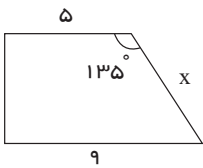
۱۰ مساحت زمینی مستطیل شکل به اضلاع ۹۰ و ۶۰ متر روی نقشه‌ای به مقیاس $\frac{1}{20000}$ چند سانتی‌متر مربع است؟

- ۱) ۷٫۲
۲) ۱۳٫۵
۳) ۱۴٫۴
۴) ۱۸



۱۱ در دوزنقه‌ی $ABCD$ اندازه‌ی BD چه قدر است؟ (تیزهوشان و نمونه دولتی - بوشهر ۹۳-۹۲)

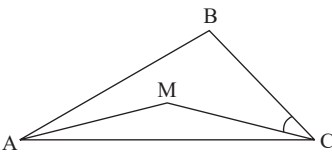
- ۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶



۱۲ در شکل مقابل مقدار x کدام است؟ (تیزهوشان و نمونه دولتی - خراسان جنوبی و شمالی ۹۳-۹۲)

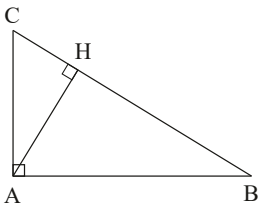
- ۱) ۴
۲) $4\sqrt{2}$
۳) ۸
۴) ۵

۱۳ در شکل روبه‌رو $MA = MC = BC$ و $\hat{B}CM = 32^\circ$ و $\hat{M}CA = 14^\circ$ ، اندازه‌ی زاویه $\hat{M}AB$ چند درجه است؟



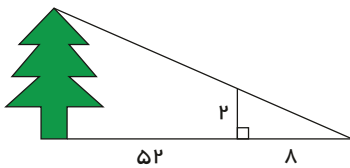
- ۱) 14°
۲) 28°
۳) 16°
۴) 32°

۱۴ در شکل مقابل AH ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC می‌باشد. اگر $AH = 12\text{ cm}$ و $AB = 20\text{ cm}$ باشند. اندازه‌ی ضلع AC کدام است؟



- ۱) ۱۳
۲) ۱۶
۳) ۱۴
۴) ۱۵

۱۵ در شکل مقابل ارتفاع درخت کدام است؟



- ۱) ۱۵
۲) ۱۴
۳) ۱۶
۴) ۱۸

پاسخنامه تشریحی

۱ دو لوزی در صورتی متشابه‌اند که زاویه‌های متناظرشان مساوی باشند. ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

۲ از رأس روبه‌روی دو ضلع موازی یعنی نقطه‌ی C رابطه‌ی جزء به کل را می‌نویسیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB}$$

$$\frac{8}{8+x} = \frac{3}{x-5} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 8(x-5) = 3(8+x) \rightarrow 8x - 40 = 24 + 3x$$

$$8x - 3x = 24 + 40 \rightarrow 5x = 64 \rightarrow x = \frac{64}{5} = 12,8$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$\text{نسبت مساحت} = (\text{نسبت تشابه})^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

۳ محیط اولین مثلث را بدست آوریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$\frac{50}{20} = \frac{5}{2} \quad \text{نسبت تشابه برابر است با:}$$

$$\frac{5}{2} \quad \text{پس نسبت اضلاع هم:}$$

$$\frac{5}{2} = \frac{12}{x} \Rightarrow x = 4,8$$

۴ ابتدا باتوجه به فرض مسئله عبارت‌های جبری مربوطه را می‌نویسیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \\ 3\hat{B} - \hat{A} = 20^\circ \end{cases}$$

$$4\hat{B} = 200^\circ \Rightarrow \hat{B} = 50^\circ$$

۵ باتوجه به شکل برای مثلث ABC داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

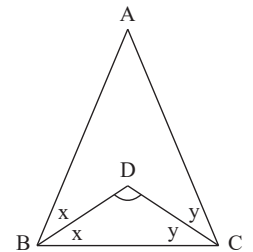
$$42 + 2x + 2y = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2x + 2y = 180^\circ - 42^\circ$$

$$\Rightarrow 2x + 2y = 138^\circ$$

$$\Rightarrow 2(x + y) = 138^\circ$$

$$\Rightarrow x + y = 69^\circ$$



حال برای مثلث BDC داریم:

$$\hat{BDC} + x = y = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{BDC} + 69^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{BDC} = 180^\circ - 69^\circ = 111^\circ$$

$$\text{نسبت تشابه} = \sqrt{\frac{48}{27}} = \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{16 \times 3}}{\sqrt{9 \times 3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{3}$$

۶ (نسبت تشابه) = نسبت مساحت‌ها

$$\frac{4}{3} = \text{نسبت تشابه} = \text{نسبت مساحت}$$

تصویر ضلع قائم روی وتر \times وتر = 2 ضلع قائم

$$AC^2 = 25 \times 9 \rightarrow AC = \sqrt{25 \times 9} = 5 \times 3 = 15 \rightarrow AC = 15$$

$$AB^2 = 25 \times 16 \rightarrow AB = \sqrt{25 \times 16} = 5 \times 4 = 20 \rightarrow AB = 20$$

$$\text{جمع سه ضلع} = 25 + 15 + 20 = 60$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷

نکته:

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸

نسبت طولها و عرضها برابرند چون متشابه هستند (۱) (۲) (۳) (۴) (۹)

$$\frac{10}{x+3} = \frac{4}{x} \rightarrow 4(x+3) = 10x \rightarrow 4x+12 = 10x \rightarrow x=2$$

طول مستطیل کوچک = ۵

عرض مستطیل کوچک = ۲

مساحت مستطیل کوچک = $5 \times 2 = 10$

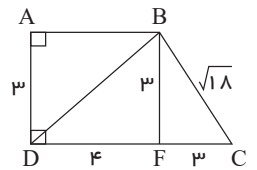
طول = $90m = 9000cm$

عرض = $60m = 6000cm$

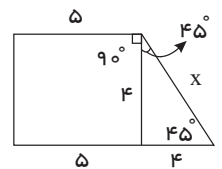
مساحت مستطیل روی نقشه = $(9000 \times \frac{1}{2000}) \times (6000 \times \frac{1}{2000}) = 13,5cm^2$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۱۰)

(۱) (۲) (۳) (۴) (۱۱)



(۱) (۲) (۳) (۴) (۱۲)



$$FC^2 = (\sqrt{18})^2 - 3^2$$

$$FC^2 = 18 - 9 = 9 \rightarrow FC = \sqrt{9} = 3$$

$$DF = DC - FC \rightarrow DF = 7 - 3 = 4$$

$$DB^2 = 4^2 + 3^2 \rightarrow DB^2 = 16 + 9 = 25 \rightarrow DB = \sqrt{25} = 5$$

ضلع^۲ + ضلع^۲ = وتر^۲

$$x^2 = 4^2 + 4^2 \rightarrow x^2 = 16 + 16 = 32 \rightarrow x = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2}$$

نقطه C خطی به موازات AM و از نقطه A خطی به موازات MC رسم می‌کنیم این دو خط همدیگر را در نقطه N قطع می‌کند.

چهارضلعی AMCن لوزی است. (اندازه زوایا روی شکل مشخص شده است) از B به N وصل می‌کنیم در مثلث NBC داریم:

$$\hat{C} = 14^\circ + 14^\circ + 32^\circ = 60^\circ \quad \text{متساوی الاضلاع } BNC \Rightarrow BN = AN$$

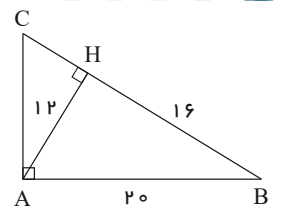
$$BC = NC$$

در نتیجه مثلث BNA مثلث متساوی الساقین است:

$$\hat{A}BN = \hat{B}AN = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow x = 60^\circ - (14^\circ + 14^\circ) = 32^\circ$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۱۴)



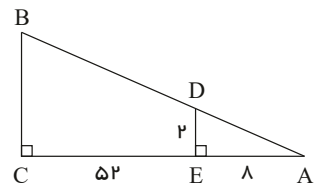
$$BH^2 = 20^2 - 12^2 \rightarrow BH^2 = 400 - 144 = 256 \rightarrow BH = \sqrt{256} = 16$$

$$\left. \begin{matrix} \hat{B} = \hat{B} \\ \hat{H} = \hat{A} = 90^\circ \end{matrix} \right\} \text{ نز } \rightarrow \triangle AHB \sim \triangle ABC$$

$$\frac{AH}{CA} = \frac{AB}{CB} = \frac{HB}{AB} \rightarrow \frac{12}{CA} = \frac{20}{20} = \frac{16}{20}$$

$$\frac{12}{CA} = \frac{16}{20} \rightarrow AC = \frac{12 \times 20}{16} = \frac{240}{16} = 15$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۱۵)



$$\left. \begin{matrix} \hat{A} = \hat{A} \\ \hat{E} = \hat{C} = 90^\circ \end{matrix} \right\} \text{ طبق حالت دو زاویه } \rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC \text{ (نز)}$$

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \rightarrow \frac{2}{BC} = \frac{8}{60} \rightarrow BC = \frac{2 \times 60}{8} = \frac{120}{8} = 15$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴

۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴

۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴

۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴



۱) جواب معادله $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x+3} = \left(\frac{5}{2}\right)^{2-5x}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $-\frac{5}{3}$ ۳) $-\frac{1}{7}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۲) اگر $3^k = 5$ باشد، مقدار عددی 9^{k+1} کدام است؟ (تیزهوشان و نمونه دولتی استان بوشهر ۹۳-۹۲)

- ۱) ۲۵ ۲) ۲۶ ۳) ۴۵ ۴) ۲۲۵

۳) کدام یک از تساوی‌های زیر صحیح است؟

- ۱) $(-7^2)^5 = 7^{10}$ ۲) $(-7^5)^2 = -7^{10}$ ۳) $(-7^5)^{-2} = 7^{-10}$ ۴) $(-7^2)^{-5} = 7^{-10}$

۴) مقدار عبارت $(-5)^{-2}$ با کدام یک از گزینه‌های زیر برابر است؟

- ۱) $(-5)^2$ ۲) $(-5^{-1})^2$ ۳) $(-5^2)^{-1}$ ۴) (-5^{-2})

۵) اگر $\sqrt{1.5} + \sqrt{x} = 2$ باشد، مقدار x کدام است؟

- ۱) ۲.۵ ۲) $\sqrt{0.5}$ ۳) ۶.۲۵ ۴) ۰.۵

۶) جرم خورشید 1.98×10^{28} کیلوگرم و جرم نوترون 1.67×10^{-25} گرم است. نسبت جرم خورشید به جرم نوترون بر حسب گرم به صورت

نماد علمی با دقت دو رقم اعشار کدام است؟ (نمونه دولتی زنجان ۹۶-۹۵)

- ۱) 1.18×10^{57} ۲) 2.32×10^{57} ۳) 2.32×10^{54} ۴) 1.18×10^{54}

۷) کدام عدد از بقیه کوچکتر است؟ (نمونه دولتی همدان ۹۶-۹۵)

- ۱) 3.5×10^{-2} ۲) 5.3×10^{-3} ۳) 35×10^{-5} ۴) 0.53×10^{-3}

۸) نماد علمی $75 \times 10^{-8} + 0.63 \times 10^{-6}$ کدام گزینه است؟ (نمونه دولتی یزد ۹۶-۹۵)

- ۱) 1.38×10^{-7} ۲) 1.38×10^{-6} ۳) 7.6×10^{-7} ۴) 7.6×10^{-6}

۹) نصف عدد $(-2)^{-15}$ برابر است با: (نمونه دولتی البرز ۹۶-۹۵)

- ۱) -2^{-16} ۲) $(-2)^{-16}$ ۳) $(-2)^{16}$ ۴) $(-2)^{-14}$

۱۰) اگر $3^x = 2$ و $b = 0$ باشد مقدار عبارت $27^{2x-1} \times 27^b$ برابر است با: (نمونه دولتی زنجان ۹۶-۹۵)

- ۱) $\frac{64}{27}$ ۲) $\frac{8}{27}$ ۳) $\frac{8}{9}$ ۴) $\frac{2}{27}$

۱۱) جذر عدد $8^2 \times 5^6 \times 9^3$ برابر است با: (نمونه دولتی خراسان جنوبی ۹۶-۹۵)

- ۱) 30^2 ۲) 40^2 ۳) 20^2 ۴) 10^2

۱۲) اگر $2^x = 7$ باشد حاصل $(0.25)^{1-x}$ کدام است؟ (نمونه دولتی مازندران ۹۶-۹۵)

- ۱) $\frac{49}{4}$ ۲) ۱۲.۲۵ ۳) $\frac{1}{196}$ ۴) $\frac{4}{49}$

۱۳ حاصل عبارت $\frac{\sqrt{20} \times \sqrt{25}}{\sqrt{30} \div \sqrt{60}}$ کدام است؟ (نمونه دولتی یزد ۹۶ - ۹۵)

- ۱ ۵ ۲ ۱۰ ۳ $\frac{1}{10}$ ۴ $\frac{1}{5}$

۱۴ حاصل $\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{48}$ برابر است با: (نمونه دولتی قم ۹۶ - ۹۵)

- ۱ ۵ ۲ ۷ ۳ $2\sqrt{3}$ ۴ $3\sqrt{3}$

۱۵ حاصل عبارت مقابل کدام است؟ (نمونه دولتی همدان ۹۶ - ۹۵)

$$\frac{6}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{12}$$

- ۱ $1 - 4\sqrt{6}$ ۲ ۲ ۳ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ۴ $-2\sqrt{3}$

۱۶ کسر $\frac{1}{2\sqrt{48} - \sqrt{27}}$ با کدام گزینه برابر است؟ (نمونه دولتی یزد ۹۶ - ۹۵)

- ۱ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ۲ $\frac{3\sqrt{3}}{5}$ ۳ $\frac{\sqrt{3}}{5}$ ۴ $\frac{\sqrt{3}}{15}$

۱۷ اگر $3^{y+2} \times 4^{2x-1} = 96$ باشد، آن گاه حاصل عبارت $\frac{4}{9}(x+y)$ کدام است؟ (تیزهوشان و نمونه دولتی استان کردستان ۹۳ - ۹۲)

- ۱ $\frac{10}{9}$ ۲ $\frac{1}{3}$ ۳ $\frac{9}{10}$ ۴ $\frac{2}{9}$

۱۸ کدام یک از اعداد زیر اول است؟ (تیزهوشان و نمونه دولتی استان کرمان ۹۳ - ۹۲)

- ۱ $2 + 3^{17} + 3^{15}$ ۲ ۱۰۰۱ ۳ ۲۳۳ ۴ ۱۱۹

۱۹ در عبارت $3^{2x-y+1} = 5^{y+3}$ مقادیر x و y برابر است با: (تیزهوشان و نمونه دولتی تهران ۹۳ - ۹۲)

- ۱ $x = 3, y = 2$ ۲ $x = -3, y = -2$ ۳ $x = 2, y = 3$ ۴ $x = -2, y = -3$

۲۰ حاصل عبارت مقابل کدام گزینه است؟ (تیزهوشان و نمونه دولتی شهر تهران ۹۳ - ۹۲)

$$(\sqrt{5} + \sqrt{3})^{50} (\sqrt{5} - \sqrt{3})^{50}$$

- ۱ 4^{25} ۲ 4^{50} ۳ 8^{25} ۴ 8^{50}

۲۱ ثلث عدد 9^{4a-2} برابر است با: (تیزهوشان و نمونه دولتی استان سیستان و بلوچستان ۹۳ - ۹۲)

- ۱ 3^{8a-5} ۲ 3^{2a-2} ۳ 3^{4a-5} ۴ 3^{8a-3}

۲۲ اگر $3^{x+1} + 3^x = 324$ باشد، مقدار عددی عبارت جبری $-5x$ کدام است؟ (نمونه دولتی استان کهگیلویه و بویراحمد ۹۳ - ۹۲)

- ۱ ۴ ۲ -۸۵ ۳ ۱۷ ۴ -۲۰

۲۳ حاصل $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}-\sqrt{99}}$ برابر است با:

- ۱ -۹ ۲ ۱ ۳ ۱۱ ۴ $\sqrt{99}$

۲۴ اگر $\sqrt{18a^3b^8}$ عدد حقیقی باشد راه حل دو دانش آموز را در نظر بگیرید:

روش مهدی: $\sqrt{18a^3b^8} = 3ab^4\sqrt{2a}$ روش علی: $\sqrt{18a^3b^8} = 3|a|b^4\sqrt{2a}$

- ۱ هر دو روش درست است. ۲ فقط روش علی درست است. ۳ فقط روش مهدی درست است. ۴ هیچ کدام از دو روش درست نیست.

۲۵ اگر $\frac{7^a \times 14^9}{7^4 \div 7^6} = 2^9$ باشد، مقدار a کدام است؟

۹ (۴)

-۷ (۳)

-۱۱ (۲)

۷ (۱)

پاسخنامه تشریحی

باید پایه‌ها را برابر کنیم که برای این کار، پایهٔ عبارت $(\frac{5}{3})^{2-5x}$ را با توان ۱ می‌نویسیم:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x+3} = \left(\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}\right)^{2-5x}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x+3} = \left(\frac{2}{5}\right)^{5x-2}$$

$$2x + 3 = 5x - 2 \rightarrow -3x = -5$$

$$x = \frac{5}{3}$$

پایه‌ها برابرند پس توان‌ها هم باید برابر باشند.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$9^{k+1} = 9^k \times 9^1 = (3^2)^k \times 9^1 = 3^2 \times 9 = 25 \times 9 = 225$$

بررسی گزینه‌ها: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

گزینهٔ ۱: نادرست است.

$$(-7^2)^5 = -7^{10}$$

گزینهٔ ۲: نادرست است.

$$(-7^5)^2 = +7^{10}$$

گزینهٔ ۳: درست است.

$$(-7^5)^{-2} = \frac{1}{(-7^5)^2} = \frac{1}{7^{10}} = 7^{-10}$$

گزینهٔ ۴: نادرست است.

$$(-7^2)^{-5} = \frac{1}{(-7^2)^5} = \frac{1}{-7^{10}} = -7^{-10}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$-(-5)^{-2} = -\left(\frac{1}{-5}\right)^2 = -\frac{1}{25}$$

بررسی گزینه‌ها:

$$X \quad -(-5)^2 = -25: 1$$

$$\checkmark \quad -(-5^{-1})^2 = -\left(-\frac{1}{5}\right)^2 = -\frac{1}{25}: 2$$

$$X \quad -(-5^2)^{-1} = -(-25)^{-1} = \frac{1}{25}: 3$$

$$X \quad -(-5^{-2}) = -\left(-\frac{1}{25}\right) = \frac{1}{25}: 4$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

طرفین را به توان ۲ برسانیم $\rightarrow \sqrt{1,5} + \sqrt{x} = 2$

$$1,5 + \sqrt{x} = 4 \Rightarrow \sqrt{x} = 4 - 1,5 = 2,5$$

طرفین را به توان ۲ برسانیم $\rightarrow x = 2,5^2 = 6,25$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶

$$\text{جرم خورشید} = 198 \times 10^{28} \text{ kg} = 198 \times 10^{28} \times 10^3 \text{ gr} = 198 \times 10^{31} \text{ gr}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{جرم خورشید}}{\text{جرم نوترون}} = \frac{198 \times 10^{31}}{167 \times 10^{-25}} = \frac{198 \times 10^{31}}{167 \times 10^{-26}} = \frac{198}{167} \times 10^{31-(-26)}$$

$$= \frac{198}{167} \times 10^{57} \approx 1,18 \times 10^{57}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷

۱) $۳٫۵ \times ۱۰^{-۲} = ۰٫۰۳۵$

۲) $۵٫۳ \times ۱۰^{-۲} = ۰٫۰۵۳$

۳) $۳۵ \times ۱۰^{-۵} = ۰٫۰۰۰۳۵$

۴) $۰٫۵۳ \times ۱۰^{-۲} = ۰٫۰۰۵۳$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸

$$۷۵ \times ۱۰^{-۲} \times ۱۰^{-۶} + ۰٫۶۳ \times ۱۰^{-۶} = ۰٫۷۵ \times ۱۰^{-۶} + ۰٫۶۳ \times ۱۰^{-۶}$$

$$= ۱۰^{-۶}(۰٫۷۵ + ۰٫۶۳) = ۱٫۳۸ \times ۱۰^{-۶}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۹

$$(-۲)^{-۱۵} = -۲^{-۱۵} \div ۲ = -۲^{-۱۵} \times ۲^{-۱} = -۲^{-۱۵-۱} = -۲^{-۱۶}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰

$$۲۷^{۲x-۱} \times ۲۷^{۷b} = (۳^۳)^{۲x-۱} \times ۲۷^۰ = ۳^{۶x-۳}$$

$$= \frac{۳^{۶x}}{۳^۳} = \frac{(۳^x)^۶}{۳^۳} = \frac{۲۷}{۳^۳}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱

$$۸^۲ \times ۵^۶ \times ۹^۲ = (۲^۳)^۲ \times ۵^۶ \times (۳^۲)^۲ = ۲^۶ \times ۵^۶ \times ۳^۴ = ۳۰^۶ \xrightarrow{\text{جزر می‌گیریم}} \sqrt[۶]{۳۰^۶} = ۳۰$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲

$$\left(\frac{1}{۴}\right)^{1-x} = (۴^{-1})^{1-x} = (۴)^{x-1} = ۲^{۲x-۲} = ۲^{-۲} \times ۲^{۲x} = \frac{1}{۴} \times (۲^x)^۲ = \frac{1}{۴} \times ۷^۲ = \frac{۴۹}{۴}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳

$$\frac{\sqrt[۳]{۲۰} \times \sqrt[۳]{۲۵}}{\sqrt[۳]{۶۰}} = \frac{\sqrt[۳]{۵۰۰}}{\sqrt[۳]{۶۰}} = \sqrt[۳]{\frac{۵۰۰}{۶۰}} = ۱$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴ برای گویا کردن از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$\frac{۲ - \sqrt{۳}}{۲ + \sqrt{۳}} \times \frac{(۲ - \sqrt{۳})}{(۲ - \sqrt{۳})} = \frac{(۲ - \sqrt{۳})^۲}{۲^۲ - (\sqrt{۳})^۲} = \frac{۴ + ۳ - ۴\sqrt{۳}}{۴ - ۳} = ۷ - ۴\sqrt{۳}$$

$$\text{حاصل عبارت} = ۷ - ۴\sqrt{۳} + \sqrt{۴۸} = ۷ - ۴\sqrt{۳} + \sqrt{۱۶ \times ۳} = ۷ - ۴\sqrt{۳} + ۴\sqrt{۳} = ۷$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵

$$\frac{۶ \times \sqrt{۳}}{\sqrt{۳} \times \sqrt{۳}} = \frac{۶\sqrt{۳}}{۳} = ۲\sqrt{۳} \quad \text{و} \quad ۲\sqrt{۱۲} = ۲\sqrt{۴ \times ۳} = ۴\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow ۲\sqrt{۳} - ۴\sqrt{۳} = -۲\sqrt{۳}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶

$$\frac{1}{۲ \times \sqrt{۱۶ \times ۳} - \sqrt{۹ \times ۳}} = \frac{1}{۸\sqrt{۳} - ۳\sqrt{۳}} = \frac{1}{۵\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۱۵}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷

$$۴^{۲x-۱} \times ۳^{y+۲} = ۹۶ \xrightarrow{\text{تجزیه پایه‌ها}} (۲^۲)^{۲x-۱} \times ۳^{y+۲} = ۲^۵ \times ۳^۱ \Rightarrow ۲^{۴x-۲} \times ۳^{y+۲} = ۲^۵ \times ۳^۱$$

$$\begin{cases} 4x - 2 = 5 \xrightarrow{\text{حل معادله}} x = \frac{7}{4} \\ y + 2 = 1 \xrightarrow{\text{حل معادله}} y = -1 \end{cases} \quad \frac{4}{9}(x+y) = \frac{4}{9}\left(\frac{7}{4} + (-1)\right)$$

$$\frac{4}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{3}$$

زوج
فرد فرد

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸ سایر گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم: $۲ + ۳^{۱۷} + ۳^{۱۵} <$ عدد زوج است پس مرکب است.

۱۰۰۱ و ۱۱۹ هم بر ۷ بخش پذیرند پس مرکب هستند.

دو عبارت زمانی مساوی هستند که توان‌ها صفر باشد $5^{y+3} = 3^{2x-y+1}$ **۱** **۲** **۳** **۴** **۱۹**

$$y + 3 = 0 \Rightarrow y = -3$$

$$2x - y + 1 = 0 \Rightarrow 2x - (-3) + 1 = 0 \Rightarrow 2x + 3 + 1 = 0 \Rightarrow 2x + 4 = 0 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = \frac{-4}{2} = -2$$

۱ **۲** **۳** **۴** **۲۰**

$$\begin{aligned} (\sqrt{5} + \sqrt{3})^{50} (\sqrt{5} - \sqrt{3})^{50} &= [(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})]^{50} \\ &= [(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2]^{50} = [5 - 3]^{50} = 2^{50} \end{aligned}$$

اتحاد مزدوج: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \rightarrow 2^{50} = (2^2)^{25} = 2^{50}$

۱ **۲** **۳** **۴** **۲۱**

$$9^{4a-2} = (3^2)^{4a-2} = 3^{8a-4}$$

$$3^{8a-4} \div 3^1 = 3^{8a-4-1} = 3^{8a-5}$$

۱ **۲** **۳** **۴** **۲۲**

$$\underbrace{3^{x+1} + 3^x}_{\text{از } 3^x \text{ فکتور می‌گیریم}} = \underbrace{3^x(3+1)}_{\text{تجزیه می‌کنیم}} \Rightarrow 3^x(3+1) = 3^x \times 2^2 \Rightarrow 3^x \times 4 = 3^x \times 4 \Rightarrow x = 4$$

با جایگزینی ۴ به جای x در عبارت داریم: $-5x = -5 \times 4 = -20$

با ضرب مزدوج، مخارج را گویا می‌کنیم: **۱** **۲** **۳** **۴** **۲۳**

$$\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{1}} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$$

$$(\sqrt{2}+1) - (\sqrt{3}+\sqrt{2}) + (\sqrt{4}+\sqrt{3}) - (\sqrt{5}+\sqrt{4}) +$$

$$\dots + (\sqrt{100} + \sqrt{99}) = 1 + \sqrt{100} = 1 + 10 = 11$$

روش هر دو درست است. چون در صورت سوال گفته که $\sqrt{18a^3b^8}$ عدد حقیقی است و چون عبارت b^8 نامنفی است پس قطعاً a باید نامنفی باشد، بنابراین **۱** **۲** **۳** **۴** **۲۴**

وجود قدرمطلق تاثیری در جواب ندارد، بنابراین روش علی و مهدی درست است.

ابتدا $14^9 = (2 \times 7)^9 = 2^9 \times 7^9$ در صورت را تجزیه می‌کنیم: **۱** **۲** **۳** **۴** **۲۵**

$$\begin{aligned} \frac{v^a \times v^9 \times 2^9}{v^7 \div v^6} = 2^9 &\Rightarrow \frac{v^a \times v^9 \times \cancel{2^9}}{v^{-2}} = \cancel{2^9} \\ \Rightarrow \frac{v^{a+9}}{v^{-2}} = 1 &\Rightarrow v^{a+9} = v^{-2} \end{aligned}$$

$$a + 9 = -2 \Rightarrow a = -11$$

در تساوی بالا پایه‌ها برابر هستند، پس توان‌ها نیز باید برابر باشند.

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴

۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴

۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴

۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴



۱) اگر $x^2 - 6xy + y^2 = 0$ باشد. حاصل عبارت $(\frac{x-y}{x+y})^2$ برابر است با:

- ① $-\frac{3}{2}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ ۲

۲) کدام عبارت در تجزیه چندجمله‌ای $9x^3 + 15x^2 - 6x$ وجود ندارد؟

- ① x ② $3x - 1$ ③ $3x + 6$ ④ $3x + 1$

۳) اگر $a + \frac{1}{a} = 3$ باشد حاصل $a^4 + \frac{1}{a^4}$ کدام است؟

- ① ۸۱ ② ۴۹ ③ ۴۷ ④ ۵۱

۴) اگر $a > b > 0$, $c > 0$ ، کدام نامساوی همواره صحیح است؟

- ① $ac > bc$ ② $ac < bc$ ③ $\frac{1}{ac} < \frac{1}{bc}$ ④ گزینه‌های ۱ و ۳ صحیح است.

۵) اگر $a + b = 9$ و $a(a + 2b) = 56$ آنگاه مقدار a ، کدام گزینه می‌تواند باشد؟

- ① ۳ ② ۴ ③ ۵ ④ ۶

۶) تجزیه عبارت $y^2 - (2x + 1)^2$ به کدام صورت درست است؟

- ① $(y - 2x + 1)(y + 2x + 1)$ ② $(y + 2x - 1)(y + 2x + 1)$ ③ $(y - 2x - 1)(y + 2x + 1)$ ④ $(y - 2x - 1)(y - 2x + 1)$

۷) کدام عبارت در تجزیه عبارت $2x^3 + x^2 - 18x - 9$ وجود ندارد؟ (نمونه دولتی البرز و قزوین ۹۶ - ۹۵)

- ① $x - 3$ ② $x + 3$ ③ $2x + 1$ ④ x

۸) در تجزیه $4a^4 - 4^3$ کدام عامل وجود ندارد؟ (نمونه دولتی تهران ۹۶ - ۹۵)

- ① $a^2 + 4$ ② $a + 2$ ③ $a - 2$ ④ $a^2 - a$

۹) اگر $\begin{cases} x^2 + xy = 7 \\ y^2 + xy = 9 \end{cases}$ باشد، حاصل $x + y$ کدام است؟ $(x, y > 0)$ (نمونه دولتی آذربایجان شرقی ۹۶ - ۹۵)

- ① ۳ ② ۴ ③ ۵ ④ ۶

۱۰) اگر $(x - 1)(x^3 + bx^2 + ax - 2) = x^4 - 3x + 2$ باشد، $a + b$ کدام است؟

- ① صفر ② ۲ ③ -۲ ④ ۱

۱۱) از مستطیلی به ابعاد $2x + 7$ و $2x + 4$ مربعی به ضلع $2x + 3$ جدا می‌کنیم مساحت قسمت باقی‌مانده کدام است؟

- ① $10x + 19$ ② $32x + 28$ ③ $-10x + 19$ ④ $-22x + 28$

۱۲) کدام گزینه در تجزیه عبارت $x^2 - 4x + 4 - y^2$ وجود دارد؟

- ① $x - y$ ② $x + y$ ③ $x + y + 2$ ④ $x - y - 2$

۱۳) حاصل $1 + 10001 \times 101 \times 11 \times 9$ با استفاده از اتحادها کدام است؟

- ① 10^4 ② 10^6 ③ 10^8 ④ 10^{10}

۱۴) کمترین مقدار عبارت $a^2 + 8a + 20$ کدام است؟

- ۴ (۱) ۱۴ (۲) ۲۰ (۳) ۲۴ (۴)

۱۵) اگر $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 3$ و $ab = 1$ باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟

- ۱۱ (۱) ۸ (۲) ۳ (۳) $\sqrt{8}$ (۴)

۱۶) اگر $x^2 - 3x - 15 = 0$ باشد، حاصل $(x - 5)(x + 2)$ کدام است؟

- ۵ (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۱۷ (۴)

۱۷) اگر $x < y$ و $xy < 0$ باشد کدام یک از نامساوی‌های زیر همواره صحیح است؟

- $x^2 > y^2$ (۱) $x^2 < xy$ (۲) $x^2 > xy^2$ (۳) $xy > y^2$ (۴)

۱۸) اگر $x^2 - x^{-2} = 6$ باشد، حاصل $x^4 + x^{-4}$ کدام است؟

- ۱۲ (۱) ۳۴ (۲) ۳۶ (۳) ۳۸ (۴)

۱۹) چند عدد طبیعی وجود دارد که اگر از دو برابر آنها ۵ واحد کم کنیم، حاصل کمتر از ۱۱ می‌شود؟

- ۷ (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) بی‌شمار (۴)

۲۰) حاصل عبارت $\sqrt{4 + 94\sqrt{4 + 96\sqrt{4 + 98 \times 102}}}$ کدام است؟

- ۹۴ (۱) ۱۰۰ (۲) ۹۸ (۳) ۹۶ (۴)

۲۱) کدام یک از عامل‌های زیر در تجزیه عبارت $(x^2 - x - 2) + (x^2 - 5x + 6)$ وجود دارد؟

- $x - 1$ (۱) $2x + 2$ (۲) $x + 2$ (۳) $x - 3$ (۴)

۲۲) اگر $(a - b)^2 + (b - c)^2 = 0$ باشد، حاصل عبارت $\frac{2a}{b + c}$ کدام گزینه است؟

- ۲ (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴)

۲۳) حاصل عبارت روبه‌رو کدام است؟ $(5 - \sqrt{24})^3 (5 + \sqrt{24})^2$

- ۱ (۱) ۲۵ (۲) $5 - \sqrt{24}$ (۳) $5 + \sqrt{24}$ (۴)

۲۴) حاصل عبارت زیر برابر است با:

$$20^2 - 18^2 + 16^2 - 14^2 + \dots + 4^2 - 2^2 =$$

- ۵۵ (۱) ۱۱۰ (۲) ۲۲۰ (۳) ۴۴۰ (۴)

۲۵) اگر عمل * چنین تعریف شود $a * b = a^2 - 2b$ در معادله $a * b = 12$ مقدار x برابر است با: (نمونه دولتی و تیزهوشان - استان کرمان ۹۳ - ۹۲)

- ۱۱ (۱) +۴ (۲) -۴ (۳) ۲ (۴)

پاسخنامه تشریحی

چون $x^2 - 6xy + y^2 = 0$ ، پس: $x^2 + y^2 = 6xy$ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

حال حاصل $\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2$ را به دست می‌آوریم:

$$\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{x^2 + y^2 + 2xy}$$

در عبارت بالا به جای $x^2 + y^2$ عبارت $6xy$ را قرار می‌دهیم:

$$\frac{6xy - 2xy}{6xy + 2xy} = \frac{4xy}{8xy} = \frac{1}{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ابتدا از x در عبارت فاکتور می‌گیریم:

$$x(9x^2 + 15x - 6) = x(3x + 6)(3x - 1)$$

عبارت $3x + 1$ در تجزیه این عبارت وجود ندارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ابتدا دو طرف $a + \frac{1}{a} = 3$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = (3)^2 \Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 = 9 \Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} = 7$$

دوباره دو طرف عبارت را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$a^4 + \frac{1}{a^4} + 2 = 49 \Rightarrow a^4 + \frac{1}{a^4} = 47$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ با توجه به اطلاعات مسئله a و b هر سه مثبت و $a > b$ است.

$a > b$ اگر طرفین نامعادله را در یک عدد مثبت ضرب کنیم، جهت نامعادله تغییر نمی‌کند.

$$a > b \xrightarrow{\times c} ac > bc$$

اگر دو عدد علامت یکسانی داشته باشند و اگر طرفین نامعادله را معکوس کنیم، جهت نامعادله برعکس می‌شود. یعنی:

$$ac > bc \Rightarrow \frac{1}{ac} < \frac{1}{bc}$$

پس گزینه ۱ و گزینه ۳ هر دو صحیح هستند.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ابتدا طرفین معادله $a+b=9$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(a+b)^2 = 9^2 \rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 81 \quad (I)$$

$$a(a+2b) = 56 \rightarrow a^2 + 2ab = 56$$

در رابطه (I) به جای $a^2 + 2ab$ مقدار ۵۶ را قرار می‌دهیم:

$$56 + b^2 = 81 \rightarrow b^2 = 25 \Rightarrow b = \pm 5$$

برای $b = +5$ داریم:

$$a+b=9 \Rightarrow a+5=9 \Rightarrow a=4$$

برای $b = -5$ داریم:

$$a+b=9 \Rightarrow a-5=9 \Rightarrow a=14$$

مقدار a می‌تواند برابر ۴ و ۱۴ باشد که فقط عدد ۴ در گزینه‌ها قرار دارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ با کمک اتحاد مزدوج داریم:

$$y^2 - (2x+1)^2 = (y + (2x+1))(y - (2x+1)) \\ = (y + 2x + 1)(y - 2x - 1)$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$2x^2 + x^2 - 18x - 9 = (2x^2 - 18x) + (x^2 - 9) = 2x(x^2 - 9) + (x^2 - 9) \\ = (x^2 - 9)(2x + 1) = (x - 3)(x + 3)(2x + 1)$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$4(a^4 - 16) = 4(a^2 - 4)(a^2 + 4) = 4(a - 2)(a + 2)(a^2 + 4)$$

دو عبارت جبری را با هم جمع می‌کنیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

از طرفین جذر می‌گیریم $x^2 + y^2 + 2xy = 16 \Rightarrow (x+y)^2 = 16 \rightarrow x+y = 4$

$$(x-1)(x^3 + bx^2 + ax - 2) = x^4 - 3x + 2$$

$$\cancel{x^4} + bx^3 + ax^2 - 2x - x^3 - bx^2 - ax + 2 = \cancel{x^4} - 3x + 2$$

$$(b-1)x^3 + (a-b)x^2 - (a+2)x + 2 = -3x + 2$$

$$b-1 = 0 \Rightarrow b = 1$$

$$a-b = 0 \Rightarrow a = b = 1 \Rightarrow a = 1$$

$$-(a+2) = -3 \Rightarrow a = 1$$

$$a+b = 1+1 = 2$$

مساحت مستطیل = (عرض × طول) = $(2x+4)(2x+7)$

$$\rightarrow 4x^2 + 14x + 28 + 28 = 4x^2 + 22x + 28$$

مساحت مربع = (یک ضلع × خودش) = $(2x+3)(2x+3)$

$$\rightarrow 4x^2 + 6x + 6x + 9$$

مساحت مربع - مساحت مستطیل = مساحت قسمت باقی‌مانده

$$= 4x^2 + 22x + 28 - (4x^2 + 12x + 9)$$

$$= \cancel{4x^2} + 22x + 28 - \cancel{4x^2} - 12x - 9$$

$$= 10x + 19$$

عبارت صورت سؤال را تجزیه می‌کنیم، اول از اتحاد مربع دو جمله‌ای کمک می‌گیریم و سپس باتوجه به اتحاد مزدوج داریم:

$$x^2 - 4x + 4 - y^2 = (x-2)^2 - y^2 =$$

$$(x-2-y)(x-2+y) = (x-y-2)(x+y-2)$$

$$9 \times 11 \times 101 \times 10001 + 1$$

$$= (10-1)(10+1)(100+1)(10000+1) + 1$$

$$= (10-1)(10+1)(10^2+1)(10^4+1) + 1$$

$$= (10^2-1)(10^2+1)(10^4+1) + 1 =$$

$$(10^4-1)(10^4+1) + 1 = 10^8 - 1 + 1 = 10^8$$

$$a^2 + 8a + 20 = a^2 + 8a + 16 + 4 = (a+4)^2 + 4$$

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = 3^2 \Rightarrow a+b-2\sqrt{ab} = 9 \xrightarrow{ab=1} a+b-2 = 9 \Rightarrow a+b = 11$$

ابتدا طرف چپ تساوی را ساده می‌کنیم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰**

باتوجه به تساوی بالا:

در نتیجه:

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳

کم‌ترین مقدار زمانی اتفاق می‌افتد که عبارت داخل پرانتز برابر صفر شود. **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴**

عبارت $\sqrt{a}-\sqrt{b}=3$ را به توان دو می‌رسانیم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵**

۱۶) مقدار $x^2 - 3x - 15 = 0$ است، پس اگر $(x - 5)(x + 2)$ آن را کم کنیم، چیزی که باقی می‌ماند، مقدار $(x - 5)(x + 2)$ خواهد بود.

$$(x - 5)(x + 2) - (x^2 - 3x - 15) = \cancel{x^2} - \cancel{3x} - 10 - \cancel{x^2} + \cancel{3x} + 15 = 5$$

۱۷) باتوجه به اینکه $xy < 0$ ، یعنی x و y هم‌علامت نیستند و از اینکه $x < y$ یعنی y علامت مثبت دارد و x علامت منفی دارد.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱: مثال اگر $x = -2$ و $y = 3$ $\leftarrow y = 3 \neq (-2)^2$

گزینه ۲: x^2 عددی مثبت و xy منفی است، پس $xy \neq x^2$

گزینه ۳: این گزینه درست است، x^2 مثبت و xy^2 منفی است، پس همواره $x^2 > xy^2$

گزینه ۴: xy مقداری منفی و y^2 مقداری مثبت است، پس $xy \neq y^2$

۱۸) دو طرف تساوی $x^2 - x^{-2} = 6$ را به توان دو می‌رسانیم: ۱ ۲ ۳ ۴

$$\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2 = (6)^2 \rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} - 2 = 36$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = 38$$

۱۹) صورت سؤال را به صورت نامعادله می‌نویسیم: $2x - 5 < 11$ ، پس باید مجموعه جواب این نامعادله را به دست آوریم.

$$2x - 5 < 11 \Rightarrow 2x < 16 \Rightarrow x < 8$$

چون مجموعه جواب: «های کوچک‌تر از ۸ و اعداد طبیعی هستند، در نتیجه X می‌تواند مقادیر ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ داشته باشد.

۲۰) از داخلی‌ترین رادیکال شروع به حل سؤال می‌کنیم:

100×98 با استفاده از اتحاد مزدوج برابر $(100 + 2)(100 - 2)$ است، پس:

$$\sqrt{4 + (100 - 2)(100 + 2)} = \sqrt{4 + 100^2 - 4} = \sqrt{100^2} = 100$$

حال داریم:

100×96 برابر است با $(98 + 2)(98 - 2)$ پس:

$$\sqrt{4 + (98 - 2)(98 + 2)} = \sqrt{4 + 98^2 - 4} = \sqrt{98^2} = 98$$

داریم:

98×94 نیز برابر $(96 + 2)(96 - 2)$ است، پس:

$$\sqrt{4 + (96 - 2)(96 + 2)} = \sqrt{4 + 96^2 - 4} = \sqrt{96^2} = 96$$

۲۱) ۱ ۲ ۳ ۴

$$(x^2 - 5x + 6) + (x^2 - x - 2) = (x - 2)(x - 3) + (x - 2)(x + 1) = (x - 2)((x - 3) + (x + 1)) = (x - 2)(2x - 2) = 2(x - 2)(x - 1)$$

۲۲) نکته: هرگاه مجموع چند عبارت که با توان زوج آمده‌اند صفر بود، تک تک آن عبارات صفر هستند.

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \rightarrow a, b, c \text{ با هم برابرند}$$

حال در عبارت خواسته شده به جای b و c نیز a می‌گذاریم:

$$\frac{2a}{b + c} = \frac{2a}{a + a} = \frac{2a}{2a} = 1$$

۲۳) ۱ ۲ ۳ ۴

$$(\delta - \sqrt{24})^3 (\delta + \sqrt{24})^2 = (\delta - \sqrt{24})(\delta + \sqrt{24})(\delta + \sqrt{24})(\delta - \sqrt{24})(\delta + \sqrt{24})$$

$$= (\delta - \sqrt{24})(\delta + \sqrt{24})(\delta - \sqrt{24})(\delta + \sqrt{24})(\delta + \sqrt{24})(\delta - \sqrt{24}) = (\delta - \sqrt{24})(\delta + \sqrt{24})^2 (\delta - \sqrt{24})^2 = (\delta^2 - 24)(\delta^2 - 24) = (\delta^2 - 24)^2$$

۲۴) نکته: اتحاد مزدوج $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ ۱ ۲ ۳ ۴

$$(20^2 - 18^2) + (16^2 - 14^2) + \dots + (4^2 - 2^2) = [(20 - 18)(20 + 18)] +$$

$$[(16 - 14)(16 + 14)] + \dots + [(4 - 2)(4 + 2)] = [2(20 + 18)] + [2(18 + 16)] + \dots$$

$$+ [2(4 + 2)] = 2[20 + 18 + 16 + 14 + \dots + 4 + 2] =$$

$$2 \times 2(10 + 9 + 8 + 7 + \dots + 2 + 1) = 4(10 + 9 + 8 + 7 + \dots + 2 + 1) =$$

$$4(10 + 9 + 8 + 7 + \dots + 2 + 1) = 4 \times 55 = 220$$

۲۵) با توجه به تعریف * داریم: ۱ ۲ ۳ ۴

$$2 * x = 2^2 - 2x = 4 - 2x$$

$$4 - 2x = 12 \rightarrow -2x = 12 - 4 \Rightarrow -2x = 8 \rightarrow x = \frac{8}{-2} = -4$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴

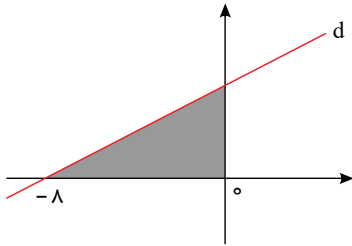
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴

۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴

۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴



۱ خط d محور x ها را در نقطه $\begin{bmatrix} -8 \\ 0 \end{bmatrix}$ قطع کرده است. اگر مساحت قسمت سایه زده شده ۱۶ باشد، شیب خط d چقدر است؟



- ۱) ۲-
- ۲) ۱-
- ۳) $\frac{1}{2}$
- ۴) ۲

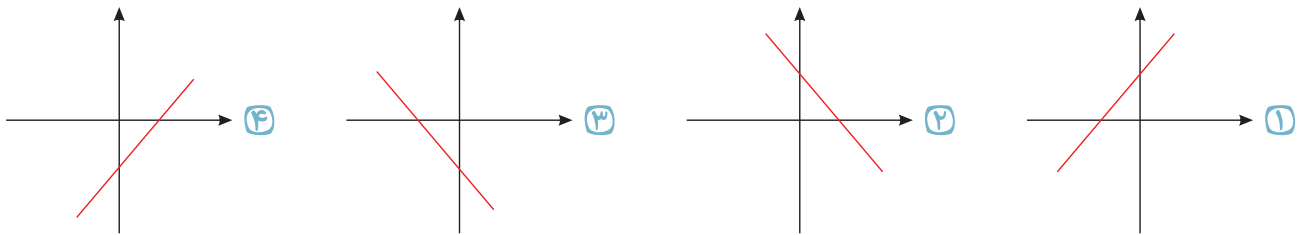
۲ اگر نقطه‌ی $\begin{bmatrix} 2m \\ m+1 \end{bmatrix}$ روی خط به معادله‌ی $3Y - 2X = -1$ قرار داشته باشد، مقدار m کدام است؟ (نمونه دولتی و تیزهوشان - استان قم ۹۳-۹۲)

- ۱) ۴-
- ۲) ۳-
- ۳) ۳
- ۴) ۴

۳ مساحت شکل حاصل از برخورد خطوط $y = 1$ و $2y - 3x = 6$ و $3y + 2x = 9$ کدام گزینه است؟ (نمونه دولتی - چهارمحال و بختیاری و فارس ۹۶-۹۵)

- ۱) $\frac{10}{3}$
- ۲) $\frac{5}{3}$
- ۳) $\frac{13}{3}$
- ۴) $\frac{26}{3}$

۴ نمودار خط به معادله $y = x - 2$ کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟



۵ در دستگاه مقابل حاصل $x + y$ برابر است با: (نمونه دولتی و تیزهوشان - استان چهارمحال و بختیاری ۹۳-۹۲)

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - y = 11 \end{cases}$$

- ۱) ۳
- ۲) ۱
- ۳) ۵
- ۴) ۱-

۶ مقدار m چقدر باشد تا نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} 5m - 2 \\ 2m + 5 \end{bmatrix}$ روی خط $y = 3x - 2$ باشد؟ (نمونه دولتی و تیزهوشان - استان سیستان و بلوچستان ۹۳-۹۲)

- ۱) ۲
- ۲) ۲-
- ۳) ۱-
- ۴) ۱

۷ خط $y = 5x + b$ محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند. اگر مساحت مثلث OAB برابر ۱۰ باشد، مقدار b چقدر است؟ (نمونه دولتی - آذربایجان شرقی ۹۶-۹۵)

- ۱) ۵-
- ۲) ۱۰-
- ۳) ۱۱
- ۴) ۱۲

۸ مساحت شکلی که از برخورد چهار خط $x = 2$, $x = -1$, $y = 3$ و $y = -2$ به وجود می‌آید برابر است با:

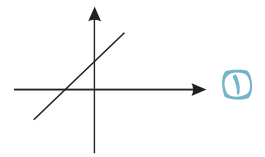
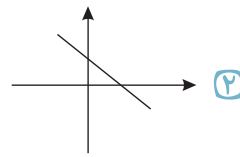
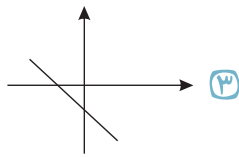
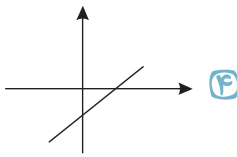
- ۱) ۷٫۵ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۱۰٫۵

۹ در دستگاه زیر مقدار $x + y$ کدام است؟

$$\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{5}{y} = 2 \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 6 \end{cases}$$

- ۱) ۱ ۲) -۱۲ ۳) ۷ ۴) $\frac{-1}{12}$

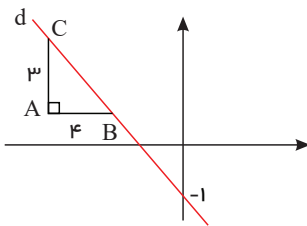
۱۰ در کدام یک از خط‌های زیر، شیب منفی و عرض از مبدأ مثبت است؟ (نمونه دولتی - بوشهر، خوزستان، کرمانشاه و شهرستان‌های استان تهران ۹۶ - ۹۵)



۱۱ مقدار a چقدر باشد تا عرض از مبدأ خط $a^2 + 4a^2y + 3ax - 4 = 0$ برابر ۲ باشد؟ (نمونه دولتی - چهارمحال و بختیاری و فارس ۹۶ - ۹۵)

- ۱) $\pm \frac{2}{3}$ ۲) $\pm \frac{4}{9}$ ۳) $\pm \frac{3}{2}$ ۴) $\pm \frac{9}{4}$

۱۲ باتوجه به شکل معادله خط d کدام است؟



- ۱) $3y = 4x + 1$ ۲) $y = \frac{4}{3}x - 2$ ۳) $y = \frac{-4x}{3} - 1$ ۴) $y = \frac{-3}{4}x - 1$

۱۳ اگر نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} m-1 \\ 3-6m \end{bmatrix}$ همواره در ناحیه‌ی سوم باشد، در این صورت m در کدام رابطه صدق می‌کند؟ (نمونه دولتی - سیستان و بلوچستان، خراسان جنوبی، خراسان شمالی و هرمزگان ۹۶ - ۹۵)

- ۱) $-\frac{1}{2} < m < 1$ ۲) $\frac{1}{2} < m < 1$ ۳) $1 < m < 2$ ۴) $\frac{1}{2} < m < 2$

۱۴ باتوجه به $\begin{cases} x^{2m} \div x^n = x^4 \\ x^{3m} \times x^{2n} = x^{13} \end{cases}$ مقدار m کدام گزینه است؟ (نمونه دولتی و تیزهوشان - استان البرز ۹۳ - ۹۲)

- ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

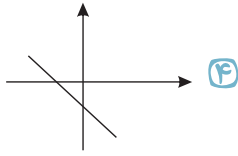
۱۵ معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ گذشته و شیب آن برابر $-\frac{1}{2}$ باشد، برابر است با: (نمونه دولتی و تیزهوشان - استان چهارمحال و بختیاری ۹۳ - ۹۲)

- ۱) $3x - 2y = 0$ ۲) $2x + y = 7$ ۳) $x + 2y = 8$ ۴) $y = -\frac{1}{2}x + 3$

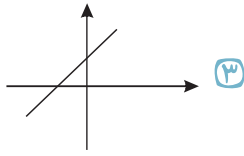
۱۶ دو نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} 3 \\ a+4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 \\ a-11 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. مقدار a چقدر باشد تا خط AB از مبدأ مختصات بگذرد؟ (نمونه دولتی و تیزهوشان - استان قم ۹۳ - ۹۲)

- ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

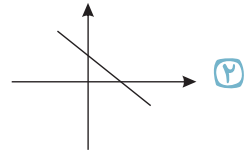
۱۷) اگر a, b, c سه عدد حقیقی باشند، نمودار خط $a^2x + b^2y = c^2$ کدام یک از گزینه‌های زیر است؟ (نمونه دولتی و تیزهوشان - استان گلستان ۹۳ - ۹۲)



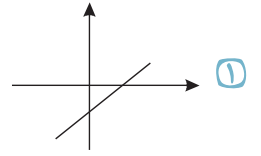
۴



۳



۲



۱

۱۸) معادله‌ی خطی که از محل برخورد دو خط $y = x - 1$ و $3y - 2x = 1$ می‌گذرد و شیب آن -2 است، کدام است؟ (نمونه دولتی - قم ۹۶ - ۹۵)

۴ $y = -2x - 11$

۳ $y = -2x + 11$

۲ $y = -2x + 5$

۱ $y = -2x - 5$

۱۹) شیب خط به معادله‌ی $2x = \frac{3-2y}{5}$ ، برابر است با: (نمونه دولتی - کردستان، لرستان و همدان ۹۶ - ۹۵)

۴ $-\frac{3}{2}$

۳ -5

۲ $\frac{3}{2}$

۱ 5

۲۰) معادله‌ی خطی که از محل برخورد دو خط $3x - 2y = 5$ و $4x + 3y - 1 = 0$ گذشته و عرض از مبدأ آن -3 باشد، کدام است؟

۴ $y + 2x = 3$

۳ $y - 2x = 3$

۲ $y = -2x - 3$

۱ $y = 2x - 3$

۲۱) خطی به معادله $y = -m^2x + m^2 + 1$ به ازای هر $(m \neq 0)$ از کدام ناحیه‌ی مختصاتی عبور نمی‌کند؟

۴ ناحیه ۴

۳ ناحیه ۳

۲ ناحیه ۲

۱ ناحیه ۱

۲۲) مساحت مثلثی که خط $2x + 4y = 12$ با محورهای مختصات می‌سازد کدام است؟

۴ ۱۸

۳ ۳

۲ ۶

۱ ۹

۲۳) عرض از مبدأ خط گذرنده از دو نقطه $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ کدام است؟

۴ $-\frac{19}{3}$

۳ $\frac{19}{3}$

۲ $\frac{11}{3}$

۱ $\frac{2}{3}$

۲۴) خطی داریم که از نقطه $\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ و محل برخورد دو خط $x = 2$ و $y = -3$ می‌گذرد. عرض از مبدأ این خط چند است؟

۴ $\frac{5}{4}$

۳ $-\frac{4}{5}$

۲ $-\frac{5}{4}$

۱ -1

۲۵) زاویه‌ی بین یک خط با جهت مثبت محور طول‌ها زاویه‌ی تند است و عرض از مبدأ این خط مثبت است.

چنین خطی، از کدام یک از نقاط زیر اصلاً عبور نمی‌کند؟

۴ $\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$

۳ $\begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$

۲ $\begin{bmatrix} -4 \\ -5 \end{bmatrix}$

۱ $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

۲۶) در تساوی مقابل، $a + b$ چند می‌شود؟

$$5^{a-3b-7} = 5^{2a-7b-15}$$

۴ ۵

۳ -3

۲ -5

۱ ۳

۲۷) مقدار m چند باشد تا خط $3y - 5x + 3m - 2 = -6$ از مبدأ بگذرد؟

۴ $-\frac{2}{3}$

۳ $\frac{4}{3}$

۲ $\frac{2}{3}$

۱ $-\frac{4}{3}$

۲۸) اگر قرینه‌ی خط $y = ax + b$ را نسبت به محور عرض‌ها رسم کنیم، شیب و عرض از مبدأ آن چه تغییری می‌کند؟ ($a, b \neq 0$)

۲ شیب و عرض از مبدأ، هر دو قرینه می‌شوند.

۱ شیب و عرض از مبدأ، هر دو ثابت می‌مانند.

۴ شیب قرینه می‌شود و عرض از مبدأ ثابت می‌ماند.

۳ شیب ثابت می‌ماند و عرض از مبدأ قرینه می‌شود.

۲۹) اگر خط $5 - ax = 2y$ موازی با خط $5 = y + 2$ باشد، مقدار a چقدر است؟

۴ (۴)

صفر (۳)

۲ (۲)

۴ (۱)

۳۰) یک پرتو نور از نقطه $(2, 7)$ به نقطه 3 روی محور y ها می‌تابانیم. هر دو محور x ها و y ها مانند آینه عمل می‌کنند. پس از دومین بازتاب پرتو

نور با چه شیبی ادامه مسیر خواهد داد؟

 $-\frac{1}{2}$ (۴)

-۲ (۳)

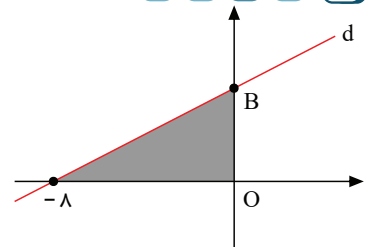
 $\frac{1}{2}$ (۲)

۲ (۱)

پاسخنامه تشریحی

باتوجه به اینکه مثلث قائم‌الزاویه است، پس: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱

$$\frac{OB \times 8}{2} = 16 \Rightarrow OB \times 8 = 32 \Rightarrow OB = 4$$



بنابراین این خط محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۴ قطع کرده است. پس $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ روی این خط قرار دارد. حال با داشتن دو نقطه از این خط شیب خط را به دست می‌آوریم. $\begin{bmatrix} -8 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\text{شیب خط} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 0}{0 - (-8)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

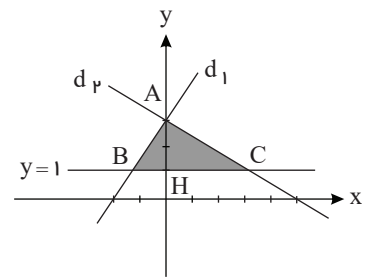
ابتدا مختصات نقطه را در معادله‌ی خط قرار می‌دهیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲

$$3(m+1) - 2(2m) = -1 \Rightarrow 3m + 3 - 4m = -1 \Rightarrow -1m = -1 - 3 = -4 \Rightarrow m = \frac{-4}{-1} = 4$$

خطها را رسم می‌کنیم. برای این کار باید از هر خط دو نقطه را مشخص نماییم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۳

$$d_1: 2y - 3x = 6 \rightarrow \begin{array}{l|l} x & -2 \\ y & 3 \end{array}$$

$$d_2: 3y + 2x = 9 \rightarrow \begin{array}{l|l} x & 3 \\ y & 1 \end{array}$$



برای پیدا کردن مساحت مثلث ABC نیاز است که محل برخورد خط $y=1$ با خطهای d_1 و d_2 را مشخص کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} d_2: 3y + 2x = 9 \\ y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 3 \times 1 + 2x = 9 \rightarrow 2x = 6 \rightarrow x = 3 \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} d_1: 2y - 3x = 6 \\ y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \times 1 - 3x = 6 \rightarrow -3x = 4 \rightarrow x = \frac{-4}{3} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین اندازه‌ی پاره‌خط BC برابر است با فاصله‌ی بین طول نقطه‌ی C و نقطه‌ی B . بنابراین داریم:

$$\text{طول } BC = \frac{4}{3} + 3 = \frac{13}{3}$$

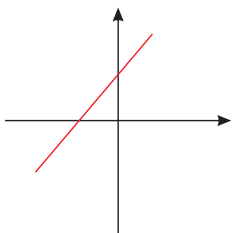
پس مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{BC \times AH}{2} = \frac{\frac{13}{3} \times 2}{2} = \frac{13}{3}$$

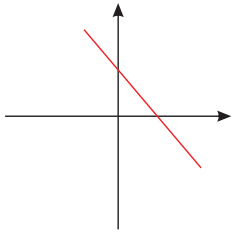
نمودار خط $y = x - 2$ دارای شیب ۱ (مثبت) و عرض از مبدأ (-2) (عدد منفی) ۱ ۲ ۳ ۴ ۴

بررسی گزینه‌ها:

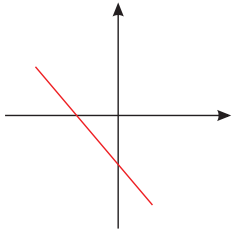
گزینه ۱: شیب عددی مثبت، عرض از مبدأ عددی مثبت



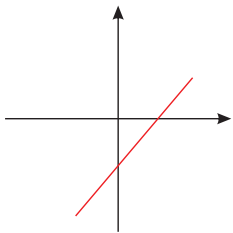
گزینه ۲: شیب عددی منفی، عرض از مبدأ عددی مثبت



گزینه ۳: شیب عددی منفی، عرض از مبدأ عددی منفی



گزینه ۴: شیب عددی مثبت، عرض از مبدأ عددی منفی



نکته: خطهایی که با سمت راست محور طولها، زاویهٔ تند بسازند، دارای شیب مثبت و خطهایی که با سمت راست محور طولها زاویهٔ باز بسازند، دارای شیب منفی هستند.

1 2 3 4 5

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - y = 11 \end{cases}$$

$$\Delta x = 15$$

$$x = \frac{15}{5} = 3$$

$$x = 3$$

$$\begin{aligned} 2 \times x + y &= 4 \\ (2 \times 3) + y &= 4 \\ y &= 4 - 6 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y & \\ 3 + (-2) &= +1 \end{aligned}$$

1 2 3 4 6

نقطه‌ی A روی خط باشد؛ یعنی مختصات A در معادله‌ی خط صدق می‌کند. پس به جای x طول نقطه‌ی A و به جای y عرض نقطه‌ی A را قرار می‌دهیم:

$$y = 3x - 2 \rightarrow 2m + 5 = 3(5m - 2) - 2 \rightarrow 2m + 5 = 15m - 6 - 2$$

$$\rightarrow -13m = -13 \Rightarrow m = \frac{-13}{-13} = +1$$

1 2 3 4 7

$$x = 0 \rightarrow y = b$$

$$y = 0 \rightarrow 0 = \Delta x + b \rightarrow \Delta x = -b \rightarrow x = \frac{-b}{\Delta}$$

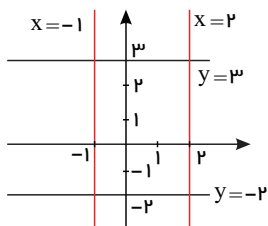
$$\left. \begin{aligned} S_{\Delta OAB} &= \frac{|y \times x|}{2} = \frac{b \times \frac{-b}{\Delta}}{2} = \frac{b^2}{2\Delta} \\ S_{\Delta OAB} &= 10 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{b^2}{2\Delta} = 10 \rightarrow b^2 = 20$$

$$\rightarrow b = \sqrt{20} = \pm 2\sqrt{5} \rightarrow b = -10$$

1 2 3 4 8

این چهار خط را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

شکل حاصل مستطیلی به طول ۵ و عرض ۳ است، پس مساحت آن برابر $3 \times 5 = 15$ است.



1 2 3 4 9

ابتدا دو معادله را در xy ضرب می‌کنیم تا مخرج‌ها از بین برود.

$$\begin{aligned} \times xy \begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{5}{y} = 2 \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 6 \end{cases} &\rightarrow \times -3 \begin{cases} 6y + 5x = 2xy \\ 2y + 3x = 6xy \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6y + 5x = 2xy \\ -6y - 9x = -18xy \end{cases} \\ & \quad \quad \quad -4x = -16xy \\ & \quad \quad \quad \frac{-4x}{-16x} = y \rightarrow y = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2y + 3x = 6xy &\xrightarrow{y=\frac{1}{4}} 2\left(\frac{1}{4}\right) + 3x = 6x\left(\frac{1}{4}\right) \rightarrow \frac{1}{2} + 3x = \frac{3x}{2} \xrightarrow{\text{طرفین ضریب 2}} 1 + 6x = 3x \\ \rightarrow 3x = -1 &\rightarrow x = -\frac{1}{3} \\ x + y = \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{3}\right) &= -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

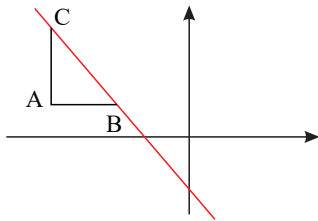
اگر شیب منفی باشد، زاویه‌ی خط با محور طول‌ها، زاویه‌ی باز است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۰)

نکته: برای به دست آوردن عرض از مبدأ یک خط، کافی است که به جای x مقدار صفر قرار دهیم. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۱)

$$\begin{aligned} x = 0 \rightarrow -4 + 0 + 4a^2y + a^2 &= 0 \rightarrow -4 + 0 + 4a^2 + a^2 = 0 \\ \text{عرض از مبدأ} = 2 = y & \end{aligned}$$

$$\rightarrow 9a^2 = 4 \rightarrow a^2 = \frac{4}{9} \rightarrow a = \pm \frac{2}{3}$$

اول باید بررسی کنیم که $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ در کدام گزینه‌ها صدق می‌کند. در معادله‌های خطی گزینه‌های ۳ و ۴ نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ صدق می‌کند. نکته: شیب خط برابر است با: نسبت ضلع مقابل به ضلع مجاور مثلث در مثلث ABC یعنی نسبت $\frac{AC}{AB}$. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۲)



$$\text{شیب} = \left| \frac{2}{4} \right|$$

$$y = -\frac{3}{4}x - 1$$

چون باتوجه به شکل شیب منفی است، پس معادله خط به صورت:

نکته: نقاطی که در ناحیه‌ی سوم دستگاه مختصات باشند، دارای طول و عرض منفی‌اند. بنابر نکته فوق داریم: (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۳)

$$A = \begin{bmatrix} m-1 \\ 3-6m \end{bmatrix} \Rightarrow \left. \begin{aligned} m-1 < 0 &\rightarrow m < 1 \\ 3-6m < 0 &\rightarrow 3 < 6m \rightarrow \frac{1}{2} < m \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{1}{2} < m < 1$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۱۴)

$$x^{2m} \div x^n = x^4 \rightarrow 2m - n = 4 \quad x^{3m} \times x^{2n} = x^{13} \rightarrow 3m + 2n = 13$$

$$\begin{cases} 2m - n = 4 \\ 3m + 2n = 13 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4m - 2n = 8 \\ 3m + 2n = 13 \end{cases}$$

$$7m = 21 \rightarrow m = 3$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۱۵)

$$y = ax + b \rightarrow 3 = \left(\frac{-1}{2} \times 2\right) + b \rightarrow 3 = -1 + b \rightarrow b = 4$$

$$y = \frac{-1}{2}x + 4 \rightarrow y = \frac{-1}{2}x + 4 \xrightarrow{\text{دو طرف ضریب 2}} 2y = -1x + 8 \rightarrow 2y + 1x = 8$$

ابتدا معادله‌ی خط گذرنده از $\begin{bmatrix} 3 \\ a+4 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -2 \\ a-11 \end{bmatrix}$ را می‌نویسیم. اگر این خط از مبدأ بگذرد پس به شکل $y = mx$ می‌باشد. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۶)

مختصات هر دو نقطه را در این معادله جایگزین می‌کنیم.

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 3 \\ a+4 \end{bmatrix} \rightarrow a+4 = m \times 3 \\ \begin{bmatrix} -2 \\ a-11 \end{bmatrix} \rightarrow a-11 = -2m \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+4-3m = 0 \\ a-11+2m = 0 \end{cases} \rightarrow -1 \times \begin{cases} a+4-3m = 0 \\ a+2m = 11 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -a + 3m = 4 \\ a + 2m = 11 \end{cases}$$

$$\Delta m = 15 \rightarrow m = \frac{15}{5} = 3$$

با جایگزینی $m = 3$ در یکی از معادلات a را پیدا می‌کنیم:

$$a + 4 = 3m \rightarrow a + 4 = 3 \times 3 \rightarrow a + 4 = 9 \rightarrow a = 9 - 4 \rightarrow a = 5$$

هر عدد به توان (۲) نمی‌تواند منفی باشد. پس شیب منفی و عرض از مبدأ مثبت است: **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷**

$$\text{عدد منفی} = \frac{\text{ضریب } -x}{\text{ضریب } y} = -\frac{a^2}{b^2}$$

$$\text{عدد مثبت} = \frac{\text{عدد ثابت}}{\text{ضریب } y} = \frac{c^2}{b^2}$$

فقط در گزینه‌ی ۲ است که شیب منفی و عرض از مبدأ مثبت است.

ابتدا محل برخورد دو خط را پیدا می‌کنیم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸**

$$\left. \begin{array}{l} y - x = -1 \xrightarrow{\times(-3)} -3y + 3x = 3 \\ 3y - 2x = 1 \rightarrow 3y - 2x = 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{جمع}} x = 4 \rightarrow y - 4 = -1 \rightarrow y = 3$$

$$\text{شیب خط} = -2 \quad \text{و} \quad \text{نقطه} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow y = -2x + b$$

$$\rightarrow 3 = -8 + b \rightarrow b = 11$$

$$\text{معادله‌ی خط: } y = -2x + 11$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹

$$\frac{3 - 2y}{5} = \frac{2x}{1} \rightarrow 3 - 2y = 10x$$

$$\rightarrow -2y = 10x - 3 \xrightarrow{\div(-2)} \frac{-2y}{-2} = \frac{10x}{-2} - \frac{3}{-2} \rightarrow y = -5x + \frac{3}{2} \Rightarrow \text{شیب خط} = -5$$

ابتدا محل برخورد دو خط را به دست می‌آوریم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰**

$$\begin{cases} 4x + 3y - 1 = 0 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \times 2 \\ \times 3 \end{array} \begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 8x + 6y = 2 \\ 9x - 6y = 15 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 17x = 17 \\ x = 1 \end{array}$$

$$4x + 3y = 1 \xrightarrow{x=1} 4 + 3y = 1 \Rightarrow 3y = -3 \Rightarrow y = -1$$

محل برخورد دو خط $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ است.

عرض از مبدأ یک خط یعنی محل برخورد خط با محور عرض‌ها و مختصات آن به صورت $\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ است. حال با استفاده از دو نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ شیب خط را به دست می‌آوریم.

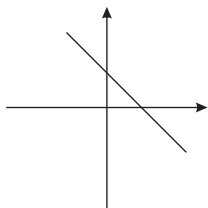
$$\text{شیب خط} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1 - (-3)}{1 - 0} = \frac{-1 + 3}{1} = 2$$

حال با داشتن شیب (۲) و عرض از مبدأ (-۳) معادله خط را می‌نویسیم:

$$y = 2x - 3$$

معادله خط به صورت $y = -m^2x + m^2 + 1$ است. باتوجه به اینکه شیب این خط برابر $-m^2$ ، پس شیب خط منفی و عرض از مبدأ این خط برابر $m^2 + 1$ که همواره مقدار مثبتی است پس شکل این خط به صورت زیر است، پس این خط از ناحیه سوم عبور نمی‌کند. **۱ ۲ ۳ ۴ ۲۱**

پس این خط از ناحیه سوم عبور نمی‌کند.



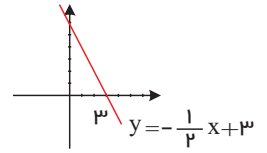
۱ ۲ ۳ ۴ ۲۲

$$2x + 4y = 12 \quad 4y = -2x + 12 \xrightarrow{\div 4} y = -\frac{1}{2}x + 3$$

ابتدا باید خط را رسم کنیم:

عرض از مبدأ ($x = 0$) و طول از مبدأ ($y = 0$) خط را به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{c|c} x & 6 \\ \hline y & 3 \end{array}$$



ارتفاع مثلث همان عرض از مبدأ خط است، یعنی ۶ و قاعده آن طول از مبدأ یا همان ۳. پس داریم:

$$\begin{aligned} \text{مساحت} &= \frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{2} \\ \frac{3 \times 6}{2} &= 9 \end{aligned}$$

ابتدا معادله خط را به دست می‌آوریم. برای این کار به شیب خط نیاز داریم که به صورت زیر به دست می‌آید: (۱) (۲) (۳) (۴) (۲۳)

$$\text{شیب} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 3}{2 - (-1)} = \frac{2}{3}$$

فرم کلی معادله خط به صورت $y = ax + b$ است که a برابر با شیب خط است که همان $\frac{2}{3}$ است.

$$y = \frac{2}{3}x + b$$

یکی از نقاط را به دلخواه در $y = \frac{2}{3}x + b$ قرار می‌دهیم تا b به دست آید:

$$y = \frac{2}{3}x + b \xrightarrow{\left[\begin{array}{c} 2 \\ 5 \end{array} \right]} 5 = \frac{2}{3}(2) + b$$

$$5 - \frac{4}{3} = b \Rightarrow b = \frac{11}{3}$$

برای به دست آوردن عرض از مبدأ به جای x در معادله $\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$ صفر قرار می‌دهیم:

$$y = \frac{2}{3}(0) + \frac{11}{3} \rightarrow y = \frac{11}{3}$$

ابتدا محل برخورد دو خط $x = 2$ و $y = -3$ را مشخص می‌کنیم که برابر $\left[\begin{array}{c} 2 \\ -3 \end{array} \right]$ است. حال معادله خط گذرنده از دو نقطه $\left[\begin{array}{c} 2 \\ -3 \end{array} \right]$ و $\left[\begin{array}{c} 4 \\ -5 \end{array} \right]$ را (۱) (۲) (۳) (۴) (۲۴) می‌نویسیم.

ابتدا شیب خط را به دست می‌آوریم:

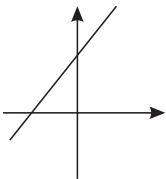
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5 - (-3)}{4 - 2} = \frac{-2}{2} = -1$$

حال با جایگذاری یکی از نقطه‌ها در رابطه $y = -x + b$ مقدار b را به دست می‌آوریم:

$$y = -x + b \xrightarrow{\left[\begin{array}{c} 2 \\ -3 \end{array} \right]} -3 = -2 + b \Rightarrow b = -1$$

عرض از مبدأ این خط برابر -1 است.

باتوجه به اطلاعات مسئله، شیب خط و عرض از مبدأ هر دو مثبت هستند و نمودار کلی چنین خطهایی به صورت زیر می‌باشد. (۱) (۲) (۳) (۴) (۲۵)



این نوع خطها از ناحیه چهارم عبور نمی‌کند و نقطه $\left[\begin{array}{c} 4 \\ -5 \end{array} \right]$ در ناحیه چهارم قرار دارد، پس چنین خطی هیچ‌گاه از این نقطه عبور نمی‌کند.

تنها در صورتی این تساوی $5^{a-3b-7} = 7^{2a-7b-15}$ برقرار است که توان آنها صفر باشد و حاصل هر دو ۱ شود، پس داریم: (۱) (۲) (۳) (۴) (۲۶)

$$\begin{cases} a - 3b - 7 = 0 \\ 2a - 7b - 15 = 0 \end{cases}$$

دستگاه بالا را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} a - 3b = 7 \\ 2a - 7b = 15 \end{cases} \times (-2) \begin{cases} -2a + 6b = -14 \\ 2a - 7b = 15 \end{cases}$$

$$-b = 1 \Rightarrow b = -1$$

$$2a - 7(-1) = 15 \Rightarrow 2a = 8 \rightarrow a = 4$$

$$\Rightarrow a + b = -1 + 4 = 3$$

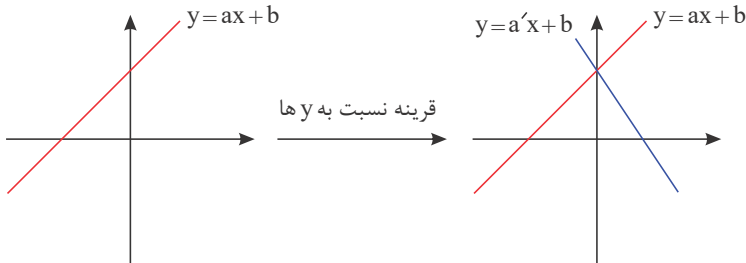
نکته: برای اینکه خطی از مبدأ بگذرد باید نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ در خط صدق کند. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۷

مختصات نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ را بر روی خط قرار می‌دهیم:

$$3y - 5x + 3m - 2 = -6 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}} 3(0) - 5(0) + 3m = -4$$

$$m = -\frac{4}{3}$$

اگر خطی را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، شیب خط قرینه و عرض از مبدأ آن ثابت می‌ماند، به نمودار زیر توجه کنید. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۸



دو خط موازی شیب‌های برابر دارند. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۹

خط $y = 3$ موازی محور x ‌هاست و برای اینکه خط $3y - ax + 5$ موازی $y = 3$ باشد، باید ضرایب x آن یعنی a برابر صفر شود (این خط نیز باید موازی محور x ‌ها باشد).

محورها مانند آینه عمل می‌کنند. بنابراین شیب پرتو نور پس از هر بار بازتاب در یک منفی ضرب خواهد شد. بنابراین کافی است شیب پرتو نور را در برخورد با محور عرض‌ها محاسبه کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۰

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴

۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴

۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴

۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴



۱) حاصل عبارت روبرو کدام است؟

$$\frac{x-8}{x^2-x-6} + \frac{x-2}{x-3}$$

۴) $\frac{x+3}{x+2}$

۳) $\frac{x-2}{x-3}$

۲) $\frac{x-4}{x-3}$

۱) $\frac{x+4}{x+2}$

۲) حاصل عبارت زیر کدام گزینه است؟ (همهٔ مخارج مخالف صفر هستند.)

$$\frac{a^2-80}{a^2-16} + \frac{a-4}{a+4} =$$

۴) $\frac{a-8}{a-2}$

۳) $\frac{a-8}{a-4}$

۲) $\frac{2a-8}{a-4}$

۱) $\frac{2a-16}{a-4}$

۳) حاصل تقسیم روبرو کدام است؟ (نمونه دولتی - استان یزد ۹۶-۹۵)

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2-9} \div \frac{x^2-6x-7}{x^2-10x+21}$$

۴) $\frac{x+1}{x-1}$

۳) $\frac{x-1}{x+1}$

۲) $\frac{x-1}{x-3}$

۱) $\frac{x+1}{x-3}$

۴) اگر باقیماندهٔ $a - 5x + 2x^2$ بر $x - 2$ برابر ۵ باشد، a چقدر است؟

۴) -۷

۳) -۵

۲) ۵

۱) ۷

۵) اگر $A = \frac{3}{2x-4}$ و $A+B = \frac{x}{2(x^2-4)}$ باشد عبارت B کدام گزینه است؟

۴) $\frac{x-6}{x^2-4}$

۳) $\frac{-x-3}{x^2-4}$

۲) $\frac{-x+3}{(x-2)(x+2)}$

۱) $\frac{x+3}{x-2}$

۶) اگر باقیماندهٔ تقسیم عبارت $b + 4x - 5x^2$ بر عبارت $x - 2$ برابر ۹ باشد، b چقدر است؟

۴) -۳

۳) ۳

۲) -۲۱

۱) ۲۱

۷) اگر $x + y = 1$ باشد، حاصل عبارت $\frac{y^2-y}{x^2-x}$ کدام است؟

۴) -۲

۳) -۱

۲) ۲

۱) ۱

۸) اگر $\frac{M}{x} = \frac{3}{4-x} - \frac{-7x+16}{x^2-4x}$ باشد، عدد M برابر است با: (نمونه دولتی - استان‌های البرز و قزوین ۹۶-۹۵)

۴) -۶

۳) ۱۶

۲) ۴۴

۱) -۴

۹) اگر $\frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{7x+1}{2x^2+x-1}$ ، آنگاه حاصل عبارت $A - B$ کدام است؟ (نمونه دولتی - استان مازندران ۹۶-۹۵)

۴) -۵

۳) ۵

۲) -۱

۱) ۱

۱۰) مقدار $m + n$ را طوری بیابید که باقی‌ماندهٔ تقسیم $2x^2 + mx^2 + n$ بر $x + 1$ برابر -۳ و بر $x - 2$ برابر ۳ باشد. (نمونه دولتی -

مرکزی و ایلام ۹۶-۹۵)

۴) +۷

۳) -۷

۲) +۵

۱) -۵

۱۱) اگر $3 = \frac{ax^2 + ax}{6x} \times \frac{2x - 6}{x^2 - 2x - 3}$ باشد مقدار a کدام است؟

- ۱) ۹ ۲) ۳ ۳) -۳ ۴) -۹

۱۲) مقدار عددی عبارت $\frac{5b}{5a - 5b} - \frac{a^2 + ab}{a^2 - b^2} + \frac{a + b}{-a - b}$ به ازای $a = 1396$ و $b = 2017$ کدام است؟

- ۱) ۱۳۹۶ ۲) -۲ ۳) -۲۰۱۷ ۴) صفر

۱۳) عبارت $\frac{x(x-1)}{x^3 - 4x}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف نشده است؟

- ۱) ۲ و -۲ ۲) -۲ و ۰ ۳) -۲ و ۰ و ۲ ۴) ۲ و ۰ و ۰ و -۳

۱۴) حاصل عبارت $\frac{2x}{x^2 + 2x + 1} + \frac{1}{x^2 - 1} - \frac{2}{1 + x}$ برابر با کدام گزینه است؟

- ۱) $\frac{-x + 3}{(x-1)(x+1)^2}$ ۲) $\frac{x}{(x-2)}$ ۳) $\frac{x+3}{(x-1)^2}$ ۴) $\frac{x+2}{(x-2)(x-1)}$

۱۵) اگر $x + \frac{1}{x} = 5$ باشد، حاصل $\left(\frac{x^4 - 1}{x^3 + x}\right)^2$ کدام است؟ (مخرج مخالف صفر فرض شده است.)

- ۱) ۲۵ ۲) ۲۱ ۳) ۲۲ ۴) ۲۳

پاسخنامه تشریحی

۱ ۲ ۳ ۴ ۱

$$\frac{x-8}{x^2-1} + \frac{x-2}{x-3}$$

ضرب دو عدد جمع دو عدد

$$= \frac{x-8}{(x-3)(x+2)} + \frac{x-2}{x-3} = \frac{(x-8) + (x+2)(x-2)}{(x-3)(x+2)} = \frac{x-8+x^2-4}{(x-3)(x+2)}$$

$$= \frac{x^2+x-12}{(x-3)(x+2)} = \frac{(x+4)(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{(x+4)}{(x+2)}$$

حاصل را به ساده‌ترین صورت می‌نویسیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲

$$\frac{a^2-8a}{a^2-16} + \frac{a-4}{a+4} = \frac{a^2-8a + (a-4)(a+4)}{(a+4)(a-4)} =$$

$$\frac{a^2-8a + a^2+16-4a}{a^2-16} = \frac{2a^2-12a+16}{a^2-16} =$$

$$\frac{2(a^2-6a+8)}{(a-4)(a+4)} = \frac{2(a-4)(a+2)}{(a-4)(a+4)} = \frac{2(a+2)}{a+4}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2-9} \times \frac{x^2-10x+21}{x^2-6x-7}$$

ضرب دو عدد جمع دو عدد اتحاد مزدوج ضرب دو عدد جمع دو عدد ضرب دو عدد

$$= \frac{(x+3)(x-1)}{(x-3)(x+3)} \times \frac{(x-7)(x-3)}{(x-7)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1}$$

نکته: برای به دست آوردن باقیمانده کافی است، مقسوم‌علیه را مساوی صفر قرار داده و ریشه آن را در مقسوم جایگذاری کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۴

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$\Rightarrow 2x^2-5x+a=5 \Rightarrow 2 \times (2)^2-5 \times 2+a=5$$

$$\Rightarrow 8-10+a=5 \Rightarrow a=7$$

در $A+B$ به جای A ، $\frac{3}{2x-4}$ را قرار می‌دهیم تا B به دست آید: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$\frac{3}{2x-4} + B = \frac{x}{2(x^2-4)}$$

$$\rightarrow B = \frac{x}{2(x^2-4)} - \frac{3}{2(x-2)} = \frac{x-3(x+2)}{2(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{x-3x-6}{2(x-2)(x+2)} = \frac{-2x-6}{2(x-2)(x+2)} = \frac{-x-3}{(x-2)(x+2)} = \frac{-x-3}{x^2-4}$$

نکته: اگر مقادیری که مقسوم‌علیه را صفر می‌کند در مقسوم قرار دهیم، مقدار به دست آمده برابر باقیمانده تقسیم است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۶

مقداری که مقسوم‌علیه را صفر می‌کند به دست می‌آوریم:

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

مقدار (۲) را در مقسوم جایگذاری می‌کنیم و حاصل را با مقدار باقیمانده (۹) مساوی قرار می‌دهیم.

$$5x^2-4x+b=5(2)^2-4 \times 2+b=9$$

$$\Rightarrow 20-8+b=9$$

$$\Rightarrow 12 + b = 9$$

$$\Rightarrow b = 9 - 12$$

$$\Rightarrow b = -3$$

$$\frac{y^2 - y}{(1-y)^2 - (1-y)} = \frac{y^2 - y}{1 + y^2 - 2y - 1 + y} = \frac{y^2 - y}{y^2 - y} = 1$$

$$\frac{-7x + 16}{x^2 - 4x} - \frac{3}{4 - x} = \frac{-7x + 16}{x(x - 4)} - \frac{3}{-(x - 4)} = \frac{-7x + 16 + 3x}{x(x - 4)}$$

$$= \frac{-4x + 16}{x(x - 4)} = \frac{-4(x - 4)}{x(x - 4)} = \frac{-4}{x} \Rightarrow \frac{-4}{x} = \frac{M}{x} \Rightarrow M = -4$$

$$\frac{A}{2x - 1} + \frac{B}{x + 1} = \frac{7x + 1}{2x^2 + x - 1} = \frac{A(x + 1) + B(2x - 1)}{(2x - 1)(x + 1)}$$

$$= \frac{Ax + A + 2Bx - B}{2x^2 + 2x - x - 1} = \frac{x(A + 2B) + (A - B)}{2x^2 + x - 1} = \frac{7x + 1}{2x^2 + x - 1}$$

مخرج‌ها برابر است

$$\begin{cases} x(A + 2B) = 7x \\ (A - B) = +1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A + 2B = 7 \\ -A + B = -1 \end{cases}$$

$$3B = 6 \rightarrow B = \frac{6}{3} = 2 \rightarrow B = 2$$

$$A + 2B = 7 \Rightarrow A + 2(2) = 7 \rightarrow A + 4 = 7 \rightarrow A = 7 - 4 \rightarrow A = 3$$

$$\Rightarrow A - B = 3 - 2 = 1$$

نکته: برای به دست آوردن باقی‌مانده‌ی تقسیم یک عبارت جبری بر مقسوم‌علیه با درجه‌ی یک (به صورت کلی $ax + b$), به این صورت عمل می‌کنیم، ابتدا مقسوم‌علیه را برابر صفر قرار داده، ریشه‌ی به دست آمده را به جای متغیر به کار رفته در مقسوم جایگذاری می‌کنیم. حاصل به دست آمده، برابر باقی‌مانده است.

جایگذاری

$$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \xrightarrow{\text{در مقسوم}} 2 \times (-1)^2 + m \times (-1) + n$$

$$= 2 + m + n \rightarrow 2 + m + n = -3 \rightarrow m + n = -5$$

جایگذاری

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \xrightarrow{\text{در مقسوم}} 2 \times (2)^2 + m \times (2) + n = 32 + 4m + n$$

$$\rightarrow 32 + 4m + n = 3 \rightarrow 4m + n = -29$$

حال با حل دستگاه مقابل، m و n را می‌یابیم:

$$\begin{array}{r} m + n = -5 \xrightarrow{\times(-1)} -m - n = 5 \\ 4m + n = -29 \xrightarrow{\quad} \quad \quad \quad 4m + n = -29 \\ \hline 3m = -24 \rightarrow m = -8 \end{array}$$

$$m + n = -5 \xrightarrow{m=-8} -8 + n = -5 \rightarrow n = +3 \quad m + n = -8 + 3 = -5$$

$$\frac{a \cancel{x} (x + 1)}{\cancel{3} \cancel{x}} \times \frac{\cancel{3} (x - 3)}{(x - 3)(x + 1)} = 3 \rightarrow \frac{a}{3} = 3 \rightarrow a = 9$$

باید عبارت را تا حد امکان ساده کنیم: **۱** **۲** **۳** **۴** **۱۱**

ابتدا صورت و مخرج هر کدام از عبارت‌های گویا را تجزیه می‌کنیم و آن‌ها را ساده می‌کنیم: **۱** **۲** **۳** **۴** **۱۲**

$$\frac{\delta b}{\delta a - \delta b} - \frac{a^2 + ab}{a^2 - b^2} + \frac{a + b}{-a - b} =$$

$$\frac{\delta b}{\delta(a - b)} - \frac{a(a + b)}{(a - b)(a + b)} + \frac{a + b}{-(a + b)}$$

$$= \frac{b}{a - b} - \frac{a}{a - b} - 1 \Rightarrow \frac{b - a}{a - b} - 1 = \frac{-(a - b)}{a - b} - 1$$

این عبارت به ازای هر a و b برابر -2 است. (البته به جز ریشه‌های مخرج که عبارت گویا در آن‌ها تعریف نشده است.)

۱۳ هر عبارت گویا در مقادیری که مخرج صفر می‌شود تعریف نشده است. ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{x(x-1)}{x^2-4x}$$

پس ریشه‌های $x^2 - 4x$ را به دست می‌آوریم:

$$x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x(x-2)(x+2) = 0$$

پس مخرج به ازای مقادیر صفر، ۲ و -۲ صفر است.

۱۴ ۱ ۲ ۳ ۴

برای جمع و تفریق عبارت‌های گویا ک.م.م مخرج‌ها را به عنوان مخرج مشترک در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned} \frac{2x}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)(x-1)} - \frac{2}{1+x} &= \frac{2x(x-1) + (x+1) - 2(1+x)(x-1)}{(x+1)^2(x-1)} \\ &= \frac{2x^2 - 2x + x + 1 - 2(x^2 - 1)}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{\cancel{2x^2} - x + 1 - \cancel{2x^2} + 2}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{3-x}{(x+1)^2(x-1)} \end{aligned}$$

۱۵ ابتدا عبارت $(\frac{x^2-1}{x^2+x})$ را ساده می‌کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{x^2-1}{x^2+x} \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2+x}$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} \frac{(x^2-1)(\cancel{x^2+1})}{x(\cancel{x^2+1})} = \frac{x^2-1}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} = x - \frac{1}{x}$$

$$(x - \frac{1}{x})^2 = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}(1)$$

حال طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$(x + \frac{1}{x})^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 25 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 23$$

آنگاه با جایگذاری $x^2 + \frac{1}{x^2}$ در عبارت (۱) داریم:

$$x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 23 - 2 = 21$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴

۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴

۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴

۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴



۱ اگر یک متوازی‌الاضلاع به ضلع‌های ۹ و ۶ سانتی‌متر و ارتفاع ۴ سانتی‌متر را حول ضلع بزرگ‌تر دوران دهیم، حجم حاصل از دوران چند سانتی‌متر مکعب است؟

۳۲۴π (۴)

۱۴۴π (۳)

۱۰۸π (۲)

۷۲π (۱)

۲ اگر شعاع قاعده‌ی مخروطی را نصف کنیم و ارتفاع آن را دو برابر کنیم، حجم آن چه تغییری می‌کند؟

چهار برابر می‌شود. (۴)

نصف می‌شود. (۳)

دو برابر می‌شود. (۲)

تغییر نمی‌کند. (۱)

۳ مساحت کره‌ای ۱۰۰π است، حجم آن است.

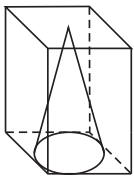
$\frac{۵۰۰}{۳}\pi$ (۴)

$\frac{۴۰۰}{۳}\pi$ (۳)

۵۰۰π (۲)

$\frac{۵۰۰}{۲}\pi$ (۱)

۴ مخروطی داخل یک مکعب مستطیل طوری قرار گرفته است که قاعده آن محاط در قاعده مکعب مستطیل و رأس آن در محل تلاقی قطرهای قاعده مکعب مستطیل قرار دارد. اگر شعاع قاعده مخروط r و ارتفاع آن h باشد، حجم فضای بین دو جسم چقدر است؟ ($\pi \simeq ۳$)

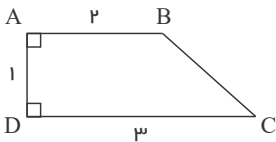


$2r^2h$ (۲)

r^2h (۱)

$4r^2h$ (۴)

$3r^2h$ (۳)



۵ حجم حاصل از دوران دوزنقه مقابل، حول ضلع DC چند سانتی‌متر مکعب است؟

$\frac{۷}{۳}\pi$ (۲)

۳π (۱)

$\frac{۴}{۳}\pi$ (۴)

$\frac{۱۳}{۳}\pi$ (۳)

۶ مستطیلی به طول a و عرض b را یکبار حول طول و بار دیگر حول عرض آن دوران می‌دهیم. حجم شکل اول چند برابر حجم شکل دوم است؟

(نمونه دولتی - استان‌های بوشهر، خوزستان، کرمانشاه و شهرستان‌های استان تهران ۹۶-۹۵)

$\frac{1}{b}$ (۴)

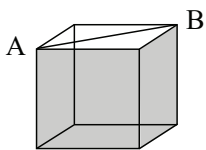
$\frac{1}{a}$ (۳)

$\frac{b}{a}$ (۲)

$\frac{a}{b}$ (۱)

۷ یک اسفنج مکعب شکل به ضلع $3b$ را در راستای پاره‌خط AB بریده‌ایم، مساحت کل یکی از قسمت‌های ایجاد شده چقدر است؟

(نمونه دولتی - استان‌های چهارمحال و بختیاری و فارس ۹۶-۹۵)

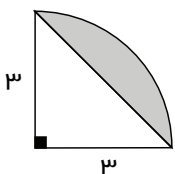


$(18\sqrt{2} + 54)b^2$ (۲)

$3\sqrt{2}b^2$ (۱)

$(27 + 9\sqrt{2})b^2$ (۴)

$27b^2$ (۳)



۸ حجم قسمت هاشورخورده حول دوران ضلع ۳ سانتی‌متر برابر است با:

6π (۲)

9π (۱)

12π (۴)

3π (۳)

۹ یک نیم کره‌ی چوبی توپُر را به طور کامل رنگ آمیزی کرده‌ایم. مساحت کل قسمت رنگ شده ۱۲۰ سانتی‌متر مربع شده است. اگر بخواهیم کره‌ای با همان شعاع نیم کره را به طور کامل رنگ آمیزی کنیم، مساحت رنگ شده در این حالت چند سانتی‌متر مربع خواهد بود؟ (نمونه دولتی - استان‌های کرمان و خراسان رضوی ۹۶ - ۹۵)

- ۱۶۰ (۱) ۲۴۰ (۲) ۳۲۰ (۳) ۳۶۰ (۴)

۱۰ در نوعی دستگاه صنعتی با حجم ترکیبی، استوانه‌ای بر یک کره محیط شده است. نسبت حجم کره به حجم استوانه چقدر است؟ (نمونه دولتی - استان‌های مرکزی و ایلام ۹۶ - ۹۵)

- $\frac{2}{3}$ (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $3\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴)

۱۱ در کره‌ای به شعاع R یک مکعب محاط شده است. نسبت حجم این کره به مکعب نام برده کدام است؟ (نمونه دولتی - شهر تهران ۹۶ - ۹۵)

- $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ (۲) $\frac{\sqrt{6}}{3}\pi$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ (۴)

۱۲ حجم هرمی با قاعده‌ی مربع به ضلع 3cm که وجه‌های جانبی آن مثلث متساوی‌الاضلاع می‌باشند، کدام گزینه است؟ (نمونه دولتی - استان زنجان ۹۶ - ۹۵)

- $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ (۱) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (۴)

۱۳ مساحت کل یک نیم کره‌ی توپُر 27π است. حجم این نیم کره کدام است؟

- 27π (۱) 18π (۲) $36\sqrt{3}\pi$ (۳) 45π (۴)

۱۴ حجم کره‌ای به شعاع $2a$ با حجم مخروطی به قطر قاعده‌ی $8a$ برابر است. نسبت ارتفاع مخروط به شعاع قاعده‌ی آن چیست؟

- $\frac{1}{4}$ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{1}{16}$ (۴)

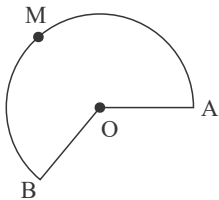
۱۵ کره‌ای را در یک استوانه به ارتفاع ۱۲ سانتی‌متر محاط می‌کنیم. حجم فضای خالی بین کره و استوانه چقدر است؟

- 432π (۱) 288π (۲) 144π (۳) 216π (۴)

۱۶ مکعبی به ضلع $\sqrt{12}$ درون یک کره محاط شده است. حجم کره چند است؟

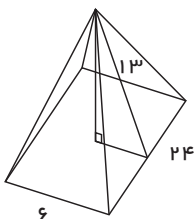
- $32\sqrt{3}\pi$ (۱) $64\sqrt{6}\pi$ (۲) 288π (۳) 36π (۴)

۱۷ با برشی از دایره مطابق شکل، مخروطی ساخته‌ایم. اگر حجم مخروط 288 و ارتفاع آن 8 باشد، اندازه کمان AMB چند درجه است؟ ($\pi = 3$)

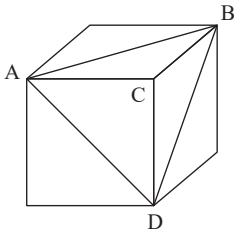


- 216° (۱) 200° (۲) 197° (۳) 230° (۴)

۱۸ حجم شکل زیر برابر کدام گزینه است؟



- 192 (۱) 229 (۲) 196 (۳) 129 (۴)



۱۹) اگر حجم مکعب مقابل برابر ۴۳۲ واحد باشد، حجم هرم $ABCD$ برابر کدام گزینه است؟

۲) $۳۲\sqrt{۲}$

۱) $۳۲\sqrt{۳}$

۴) ۱۴۴

۳) ۷۲

۲۰) متوازی‌الاضلاع با اندازه اضلاع ۵ و ۹ سانتی‌متر و مساحت ۲۷ سانتی‌متر مربع را حول ضلع بزرگ آن دوران داده‌ایم. حجم شکل حاصل از دوران، برابر چند سانتی‌متر مکعب می‌باشد؟

۴) ۲۴۳π

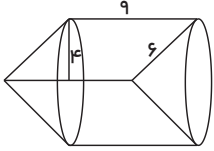
۳) ۲۲۵π

۲) ۸۱π

۱) ۲۷π

پاسخنامه تشریحی

۱ ۲ ۳ ۴ ۱



اگر مخروط برآمده را در قسمت فرو رفته قرار دهیم، استوانه‌ای به شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۹ خواهیم داشت، پس کفایت حجم استوانه حاصل را بدست آوریم:

$$V \text{ استوانه} = \pi r^2 h = \pi(4)^2 \times 9 = 144\pi$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲

$$V \text{ مخروط اولیه} = \frac{1}{3}\pi R^2 h \xrightarrow[r'=rh]{r=\frac{R}{2}} V_{\text{جدید}} = \frac{1}{3}\pi r'^2 h'$$

$$\frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 \times 2h = \frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{4} \times \cancel{2}h = \frac{1}{6}\pi R^2 h$$

$$\rightarrow \frac{V \text{ مخروط جدید}}{V \text{ اولیه}} = \frac{\frac{1}{6}\pi R^2 h}{\frac{1}{3}\pi R^2 h} = \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

مخروط جدید $\frac{1}{2}$ برابر مخروط اولیه خواهد بود.

ابتدا باتوجه به مساحت کره شعاع آن را به دست می‌آوریم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۳

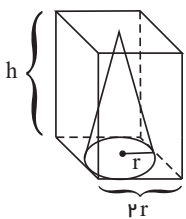
$$4\pi r^2 = 100\pi \Rightarrow 4r^2 = 100 \Rightarrow r^2 = 25 \Rightarrow r = 5$$

با داشتن شعاع کره می‌توانیم حجم آن را نیز محاسبه کنیم.

$$V \text{ کره} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi 5^3 = \frac{125 \times 4}{3}\pi = \frac{500}{3}\pi$$

باتوجه به فرض مسئله قسمت‌های مربوط به ضلع مکعب مستطیل و مخروط را یادداشت می‌کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۴

حال برای به دست آوردن حجم فضای بین دو جسم حجم مکعب مستطیل را منهای حجم مخروط می‌کنیم.



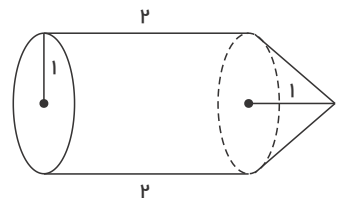
$$V \text{ مکعب مستطیل} = 2r \times 2r \times h = 4r^2 h$$

$$V \text{ مخروط} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times 4r^2 h = \frac{4}{3}r^2 h$$

$$\Rightarrow V \text{ مخروط} - V \text{ مکعب مستطیل} = \frac{4}{3}r^2 h - 4r^2 h = -\frac{8}{3}r^2 h$$

شکل زیر از یک استوانه و یک مخروط تشکیل شده است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

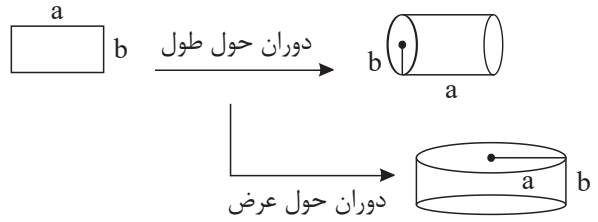
$$= V_{\text{مخروط}} + V_{\text{استوانه}} = \text{حجم شکل حاصل} \\ = \frac{1}{3}\pi(1)^2 \times 1 + \pi(1)^2 \times 2 = \frac{1}{3}\pi + 2\pi = \frac{7}{3}\pi$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۶

$$\text{استوانه } V = \pi b^2 a$$

$$\text{استوانه } V = \pi a^2 b \rightarrow \frac{\pi b^2 a}{\pi a^2 b} = \frac{b}{a}$$



شکل جدید از ۲ وجه مربع به ضلع $3b$ ، یک وجه مستطیل شکل به طول AB و عرض $3b$ و همچنین دو مثلث قائم‌الزاویه به ضلع‌های قائمه $3b$ تشکیل می‌شود. ابتدا طول AB را به دست می‌آوریم:

۱ ۲ ۳ ۴ ۷

$$(AB)^2 = (3b)^2 + (3b)^2 = 9b^2 + 9b^2 = 18b^2 \rightarrow AB = \sqrt{18b}$$

$$\text{مساحت وجه مستطیل} = 3\sqrt{2}b \times 3b = 9\sqrt{2}b^2$$

$$\text{مساحت‌های دو وجه مربعی} = 2 \times 3b \times 3b = 18b^2$$

$$\text{مساحت‌های دو وجه مثلثی} = 2 \times \frac{3b \times 3b}{2} = 9b^2$$

$$\text{مساحت کل شکل} = 9\sqrt{2}b^2 + 18b^2 + 9b^2 = 9\sqrt{2}b^2 + 27b^2 = b^2(9\sqrt{2} + 27)$$

شکل حاصل یک نیم کره با شعاع ۳ می‌شود که باید یک مخروط به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۳ را از آن کسر کرد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۸

$$\text{حجم نیم کره} = \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi \times 3^3 = \frac{2 \times 27}{3}\pi = 18\pi$$

$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi(3)^2 \times 3 = 9\pi$$

$$\rightarrow V_{\text{هشور خورده}} = 18\pi - 9\pi = 9\pi$$

نکته: مساحت یک نیم کره توپُر به شعاع R برابر است با: $3\pi R^2$

۱ ۲ ۳ ۴ ۹

$$3\pi R^2 = 12\pi \rightarrow R^2 = \frac{12\pi}{3\pi} = \frac{4\pi}{\pi} \rightarrow R = \sqrt{\frac{4\pi}{\pi}} \text{ cm}$$

$$R \text{ مساحت کره با شعاع } R = 4\pi R^2 = 4 \times \pi \left(\sqrt{\frac{4\pi}{\pi}}\right)^2 = 4 \times \frac{4\pi}{\pi} = 16\pi \text{ cm}^2$$

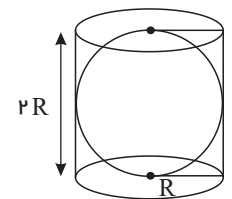
طبق شکل، شعاع کره و شعاع قاعده‌ی استوانه برابر R است. همچنین ارتفاع استوانه برابر $2R$ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰

$$V_{\text{کره}} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\text{استوانه } V = \pi R^2 h = \pi R^2 \times 2R = 2\pi R^3$$

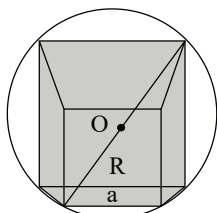
$$\rightarrow \frac{V_{\text{کره}}}{V_{\text{استوانه}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2\pi R^3} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱

قطر کره با قطر مکعب برابر است.

نکته: اندازه‌ی قطر مکعبی به ضلع a برابر است با: $\sqrt{3}a$ بنابراین داریم:



$$\text{قطر مکعب} = \text{قطر کره} = 2R = \sqrt{3}a \rightarrow a = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

مکعب $V = (\text{ضلع})^3$

$$\text{حجم مکعب} = \left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{8R^3}{3\sqrt{3}} \rightarrow \frac{V_{\text{کره}}}{V_{\text{مکعب}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{8R^3}{3\sqrt{3}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi}{\frac{8}{3\sqrt{3}}} = \frac{4}{8} \times \frac{\sqrt{3}\pi}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$$

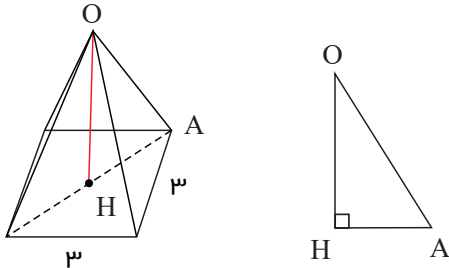
۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲

ابتدا ارتفاع هرم را به دست می آوریم، مطابق شکل داریم:

اندازهی AH نصف قطر مربع است.

$$(\text{قطر مربع})^2 = 3^2 + 3^2 = 18 \rightarrow \text{قطر مربع} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$AH = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$



همچنین OA برابر ضلع مربع یعنی 3cm است، پس داریم:

$$OH^2 = OA^2 - HA^2 \rightarrow OH^2 = 3^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$9 - \frac{18}{4} = \frac{36 - 18}{4} = \frac{18}{4} \rightarrow OH = \sqrt{\frac{18}{4}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\rightarrow \text{حجم هرم} = \frac{1}{3} (\text{مساحت مربع}) \times OH = \frac{1}{3} (3)^2 \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳

مساحت کل یک نیم کره برابر با مساحت نصف کره به علاوه مساحت دایره زیرین آن است.



مساحت دایره زیرین + مساحت نصف کره = مساحت کل نیم کره

$$= \frac{4\pi r^2}{2} + \pi r^2 = 3\pi r^2$$

$$3\pi r^2 = 27\pi \rightarrow 3r^2 = 27 \rightarrow r^2 = 9 \rightarrow r = 3$$

حال مساحت کل نیم کره را برابر 27π قرار می دهیم.

حال حجم نیم کره را به دست می آوریم:

$$V_{\text{نیم کره}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2} = \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi (3)^3 = 18\pi$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴ باتوجه به اینکه حجم کره و مخروط با هم برابرند، در نتیجه:

$$\frac{V_{\text{مخروط}}}{V_{\text{کره}}} = 1 \Rightarrow \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{\frac{1}{3}\pi (4a)^2 h}{\frac{4}{3}\pi (2a)^3} = \frac{\frac{1}{3}\pi 16a^2 h}{\frac{4}{3}\pi 8a^3} = \frac{2h}{4a} = \frac{h}{2a} = 1$$

$$\Rightarrow h = 2a$$

ارتفاع مخروط را به دست آوردیم:

حال نسبت ارتفاع مخروط به شعاع قاعده آن را به دست می آوریم:

$$\frac{h}{4a} = \frac{2a}{4a} = \frac{1}{2}$$

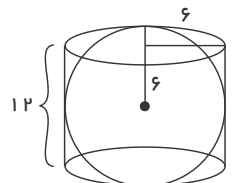
۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵

باتوجه به شکل برای به دست آوردن حجم فضای خالی بین کره و استوانه کفایت حجم استوانه ای به شعاع قاعده ۶ و ارتفاع ۱۲ را منهای حجم کره ای به شعاع ۶ کنیم.

$$\Rightarrow V_{\text{استوانه}} - V_{\text{کره}} = \pi r^2 h - \frac{4}{3}\pi r^3 = \pi (6^2 h - \frac{4}{3}r^3)$$

$$\Rightarrow \pi (6^2 \times 12 - \frac{4}{3} \times 6^3) = 6^2 \pi (12 - \frac{4}{3} \times 6)$$

$$= 6^2 \pi (12 - 8) = 6^2 \pi (4) = 144\pi$$



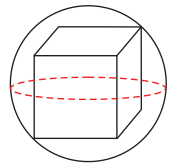
۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶

اگر ضلع مکعب برابر a باشد، آنگاه قطر مکعب $\sqrt{3}a$ است که برابر قطر کره است.

$$\Rightarrow \sqrt{3}a = 2R \stackrel{a=\sqrt{12}}{\Rightarrow} \sqrt{3} \times \sqrt{12} = 2R$$

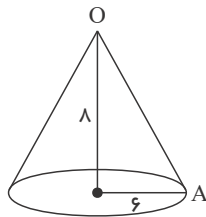
$$\Rightarrow \sqrt{36} = 2R \rightarrow 2R = 6 \rightarrow R = 3$$

$$V_{\text{کره}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 27 = 36\pi$$



ابتدا باتوجه به رابطه حجم مخروط، مساحت قاعده آن را به دست می‌آوریم و سپس شعاع قاعده مخروط را محاسبه می‌کنیم.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷



$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow \frac{1}{3} \times 3r^2 \times 8 = 288$$

حال باتوجه به اینکه کمان AB برابر محیط دایره‌ای است که در واقع قاعده مخروط است، در نتیجه محیط قاعده مخروط (دایره‌ای به شعاع ۶) را به دست می‌آوریم:

$$2\pi r = 2 \times 3 \times 6 = 36$$

$$r^2 + 8^2 = AO^2 \Rightarrow AO^2 = 100$$

$$\Rightarrow AO = 10$$

باتوجه به شعاع قاعده مخروط و ارتفاع آن و قضیه فیثاغورس شعاع AO را محاسبه می‌کنیم.

با تقسیم اندازه محیط قاعده AB بر محیط دایره‌ای به شعاع AO اندازه کمان AB (برحسب درجه) را به دست می‌آوریم:

$$\frac{36}{2\pi R} = \frac{36}{2 \times 3 \times 10} = \frac{36}{60} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{5} \mid \begin{array}{l} 216 \\ 360 \end{array}$$

در نتیجه $\widehat{AB} = 216^\circ$

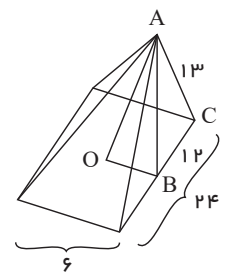
ابتدا برای مثلث ABC رابطه فیثاغورس را می‌نویسیم:

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$AB^2 + 12^2 = 13^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = 25 \Rightarrow AB = 5$$



حال برای مثلث AOB داریم:

$$AO^2 + OB^2 = AB^2$$

$$AO^2 = 3^2 = 5^2 \Rightarrow AO^2 = 16 \Rightarrow AO = 4$$

$$V_{\text{هرم}} = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 6 \times 24 \times 4 = 192$$

پس ارتفاع این هرم برابر ۴ است حال حجم هرم را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{حجم مکعب} = a^3 = 4^3 = 64$$

$$\text{حجم هرم} = \frac{1}{3}sh = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}a^2\right) \times a = \frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{6} \times 64 = 10\frac{2}{3}$$

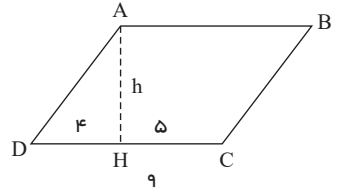
فرض کنیم ضلع مربع a باشد: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹

$$S = h \times 9 = 27$$

$$h = 3$$

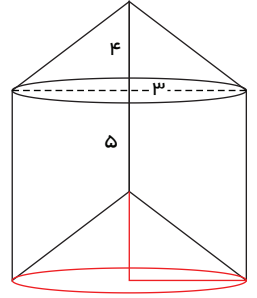
فیثاغورث

$$AH = 3 \longrightarrow DH = 4$$



مطابق شکل حجم جسم حاصل برابر است با حجم استوانه‌ای به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۹. پس:

$$V = sh = \pi r^2 h = \pi \times 3^2 \times 9 = 81\pi$$



پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴

۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴

۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴

۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴



ریاضی نهم

۱ اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ باشد، حاصل $[(B \cap A) - A] \cup (C - B)$ در حالت کلی کدام خواهد بود؟

- ۱ C ۲ B ۳ \emptyset ۴ $C - B$

۲ اگر مجموعه $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ باشد، کدام رابطه نادرست است؟

- ۱ $\{\emptyset\} \in A$ ۲ $\{\{\emptyset\}\} \in A$ ۳ $\emptyset \subseteq A$ ۴ $\{\{\emptyset\}\} \subseteq A$

۳ کسر عدد $2,029$ کدام است؟

- ۱ $\frac{2009}{990}$ ۲ $\frac{2009}{999}$ ۳ $\frac{2009}{900}$ ۴ $\frac{2029}{999}$

۴ مجموعه $\{8^{11}, 32^7, \sqrt{64^{11}}, 2^{35}\}$ چند عضو دارد؟

- ۱ ۴ ۲ ۳ ۳ ۲ ۴ ۱

۵ اشتراک دو مجموعه $A = \left\{ \frac{x}{2x+1} \mid x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x \leq 1 \right\}$ و $B = \left\{ \frac{3x+1}{4x-2} + \frac{1}{3} \mid x \in \mathbb{Z}, -1 \leq x < 3 \right\}$ کدام است؟

- ۱ $\left\{ \frac{30}{45} \right\}$ ۲ $\left\{ \frac{2}{3}, 1 \right\}$ ۳ $\left\{ \frac{1}{3}, \frac{7}{3} \right\}$ ۴ $\left\{ \frac{2}{3}, \frac{9}{6} \right\}$

۶ حاصل عبارت $3 - 3[-(3)^2 + 3 \times \frac{1}{2} - 9(\frac{1}{3})^3 - (-4)^2]$ کدام است؟

- ۱ $\frac{101}{2}$ ۲ $\frac{149}{2}$ ۳ $\frac{89}{2}$ ۴ $-\frac{89}{2}$

۷ بین اعداد -270 و 311 چند عدد صحیح وجود دارد؟ (باتغییر)

- ۱ ۵۸۲ ۲ ۵۸۳ ۳ ۵۸۱ ۴ ۵۸۰

۸ تاسی را دو بار می‌اندازیم. احتمال آن که عدد رو شده در مرتبه اول عددی غیراول، و عدد رو شده در مرتبه دوم عددی مضرب ۳ باشد، کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{5}$ ۲ $\frac{1}{6}$ ۳ $\frac{1}{4}$ ۴ $\frac{1}{3}$

۹ حاصل عبارت $\frac{1 + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1 + \frac{1}{2}}{2}} \div \frac{3}{1 - \frac{2}{1 - \frac{1}{2}}}$ کدام است؟

- ۱ $\frac{95}{24}$ ۲ $\frac{15}{6}$ ۳ $\frac{47}{12}$ ۴ $\frac{19}{8}$

۱۰ کدام دسته از مستطیل‌های زیر همواره با هم متشابهند؟

- ۱ مستطیل‌هایی که همواره طول قطرشان ثابت است.
 ۲ مستطیل‌هایی که اندازه محیطشان ۳ برابر طولشان است.
 ۳ مستطیل‌هایی که مجموع طول و عرض آن‌ها همواره یک عدد ثابت است.
 ۴ مستطیل‌هایی که زاویه بین قطرهایشان همیشه مضربی از هم باشند.

۱۱ مجموعه $((B \cap C) - A) \cup (C - (A \cup B))$ با کدام مجموعه برابر است؟

- ۱ $(C - A) \cup (B - (C \cap A))$
 ۲ $(C - (A \cap C)) \cap (C - B)$
 ۳ $(C \cap A \cup B) \cup (C - (A \cup B))$
 ۴ $(C - (A \cap C)) \cap (C - (C \cap B \cap A))$

۱۲ رابطه $A - B = B - A$ برای مجموعه‌های داده شده در کدام گزینه برقرار است؟

- ۱ اعداد طبیعی و اعداد صحیح
 ۲ اعداد گویا و اعداد حقیقی
 ۳ اعداد طبیعی و اعداد حسابی غیر صفر
 ۴ اعداد حسابی و اعداد حقیقی

۱۳ تاسی را دوبار پرتاب می‌کنیم. چه قدر احتمال دارد مجموع دو عدد رو شده بزرگتر از ۴ باشد؟

- ۱ $\frac{2}{3}$
 ۲ $\frac{5}{6}$
 ۳ $\frac{1}{2}$
 ۴ $\frac{3}{4}$

۱۴ از بین مجموعه اعداد زوج دورقمی عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم، احتمال آن که مضرب ۵ باشد، کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{4}$
 ۲ $\frac{1}{5}$
 ۳ $\frac{9}{50}$
 ۴ $\frac{4}{25}$

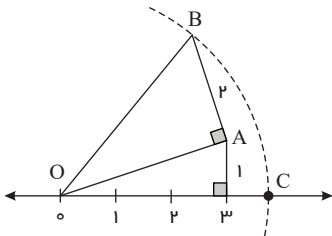
۱۵ در کدام گزینه، دو عدد گنگ بین عددهای $\sqrt{5}$ و ۵ ارائه شده است؟

- ۱ $\sqrt{6}, \sqrt{25}, \sqrt{6}$
 ۲ $\sqrt{19}, \sqrt{26}$
 ۳ $\sqrt{24}, \sqrt{2}$
 ۴ $\sqrt{24}, \sqrt{17}$

۱۶ حاصل عبارت $|1 - \sqrt{3}| + |\sqrt{3} - \sqrt{5}| + |\sqrt{5} - \sqrt{7}| + \dots + |\sqrt{99} - \sqrt{101}|$ برابر است با:

- ۱ ۱۰
 ۲ ۱
 ۳ $3\sqrt{11} - 1$
 ۴ $\sqrt{101} - 1$

۱۷ در شکل زیر، به مرکز O و به شعاع OB کمانی رسم می‌کنیم تا محور را در نقطه C قطع کند. نقطه C کدام عدد را نشان می‌دهد؟

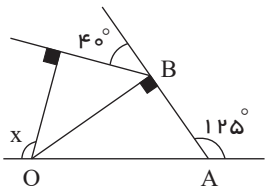


- ۱ $\sqrt{12}$
 ۲ $\sqrt{13}$
 ۳ $\sqrt{14}$
 ۴ $\sqrt{15}$

۱۸ حاصل عبارت $2\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} - \sqrt{(2\sqrt{5} - 3)^2}$ کدام است؟

- ۱ $4\sqrt{5} - 1$
 ۲ $4\sqrt{5} - 3$
 ۳ -1
 ۴ ۷

۱۹ در شکل زیر، $\hat{A} = 125^\circ$ و $\hat{B} = 40^\circ$ است. اندازه زاویه x کدام است؟



- ۱ 125°
 ۲ 110°
 ۳ 115°
 ۴ 105°

۲۰ مجموع ارقام عدد $(10^{(2n+3)} + 3)^2$ کدام است؟ (n عددی طبیعی است).

- ۱ ۹
 ۲ ۲۴
 ۳ ۱۶
 ۴ ۱۹

۲۱ خلاصه شده عبارت $\left(\sqrt{\frac{2}{4}} - \sqrt{\frac{2}{9}}\right) \left(\sqrt{\frac{4}{50}}\right)$ کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{30}$
 ۲ $\frac{1}{15}$
 ۳ $\frac{1}{10}$
 ۴ $\frac{2}{15}$

۲۲ ساده شده عبارت $A = \frac{\sqrt[3]{98} \times \sqrt{98} \times \sqrt[3]{28} \times \sqrt{72}}{\sqrt{64} \times \sqrt{63}}$ کدام است؟ (نگاه به گذشته)

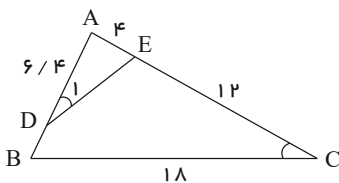
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۴۹ (۳) $7\sqrt{7}$ (۴)

۲۳ حاصل عبارت $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} + \sqrt{8} - \sqrt{18}$ کدام است؟

- ۱ (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $1 - \sqrt{2}$ (۴)

۲۴ حاصل عبارت $\frac{\left[-\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}\right]^{-3}}{\left[\left(\frac{-2}{3}\right)^{-3}\right]^2}$ کدام است؟

- ۱ (۱) $\left(\frac{2}{5}\right)^6$ (۲) $-\left(\frac{2}{5}\right)^6$ (۳) $\left(\frac{5}{2}\right)^6$ (۴) $-\left(\frac{5}{2}\right)^6$ (۴)

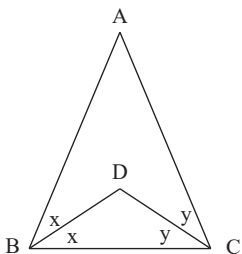


۲۵ دو مثلث ABC و ADE متشابه‌اند. نسبت تشابه آنها چقدر است؟ ($\hat{C} = \hat{D}_1$)

- ۱ (۱) $\frac{2}{9}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{1}{3}$ (۴)

۲۶ مثلثی به اضلاع ۴، ۵، ۶، x با مثلثی به اضلاع ۶، a و ۱۲ متشابه است. (اضلاع از کوچک به بزرگ مرتب شده) محیط مثلث بزرگتر کدام است؟

- ۱ (۱) ۲۶ (۲) ۲۱ (۳) ۲۷ (۴) ۱۹٫۵ (۴)



۲۷ باتوجه به شکل زیر اندازه زاویه BDC چند درجه است؟ ($\hat{A} = 42^\circ$)

- ۱ (۱) ۱۱۱ (۲) ۱۳۸ (۳) ۶۹ (۴) ۱۲۰ (۴)

۲۸ حاصل $125 \times 10^8 \times 14,8$ به صورت نماد علمی کدام است؟ (نمونه دولتی گلستان ۹۶-۹۵)

- ۱ (۱) $1,06 \times 10^{11}$ (۲) $1,06 \times 10^{11}$ (۳) $1,06 \times 10^{12}$ (۴) $1,06 \times 10^{13}$ (۴)

۲۹ چه تعداد از تساوی‌های زیر به ازای هر مقدار حقیقی همواره درست است؟ (نمونه دولتی کرمان ۹۶ - ۹۵)

- الف) $\sqrt{x^4} = x^2$ (۱) مورد ۱ (ب) $\sqrt{(-x^2)^2} = -x^2$ (۲) مورد ۳ (پ) $\sqrt{x} + 4 = 0$ (۳) مورد ۲ (ت) $-\sqrt{x} = 7$ (۴) مورد ۴

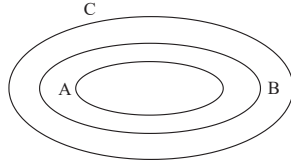
۳۰ اگر $2^x = 10$ باشد، حاصل $B = \frac{4^x + 2^x - 2^{3x+2}}{8^x}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۴٫۷۹ (۲) -۴٫۸۹ (۳) ۳٫۷۹ (۴) -۳٫۸۹ (۴)

پاسخنامه تشریحی

۱ ۲ ۳ ۴ ۱

می‌توانیم برای سه مجموعه داده شده نمودار زیر را رسم کنیم.



در این صورت داریم:

$$B \cap A = A \Rightarrow [(B \cap A) - A] = \emptyset$$

$$\emptyset \cup (C - B) = (C - B)$$

مجموعه $\{\emptyset\}$ به عنوان یک عضو در مجموعه A هست پس گزینه‌های «۱» و «۴» درست هستند. می‌دانیم تهی زیر مجموعه همه مجموعه هاست، پس گزینه «۳» نیز صحیح است. اما گزینه «۲» نادرست است. مجموعه A عضو $\{\{\emptyset\}\}$ را ندارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳

$$x = \sqrt{2029}$$

$$10x = 2029$$

$$1000x = 2029/29$$

$$1000x - 10x = 2029/29 - 20/29$$

$$990x = 2009 \Rightarrow x = \frac{2009}{990}$$

ابتدا سعی می‌کنیم اعداد داخل مجموعه را به شکل ساده‌تری مشخص کنیم

۱ ۲ ۳ ۴ ۴

$$8^{11} = (2^3)^{11} = 2^{33}$$

$$33^7 = (2^5)^7 = 2^{35}$$

$$\sqrt{64^{11}} = \sqrt{(2^6)^{11}} = \sqrt{2^{66}} = 2^{33}$$

چون در مجموعه عضو تکراری شمرده نمی‌شود پس A دارای دو عضو 2^{33} و 2^{35} می‌باشد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$A = \left\{ \frac{-2}{2(-2)+1}, \frac{-1}{2(-1)+1}, \frac{0}{2(0)+1}, \frac{1}{2(1)+1} \right\} = \left\{ \frac{2}{3}, 1, 0, \frac{1}{3} \right\}$$

$$B = \left\{ \frac{3(-1)+1}{4(-1)-2} + \frac{1}{3}, \frac{3(0)+1}{4(0)-2} + \frac{1}{3}, \frac{3(1)+1}{4(1)-2} + \frac{1}{3}, \frac{3(2)+1}{4(2)-2} + \frac{1}{3} \right\} = \left\{ \frac{2}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{7}{3}, \frac{9}{6} \right\}$$

$$\Rightarrow A \cap B = \left\{ \frac{2}{3} \right\} = \left\{ \frac{30}{45} \right\}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶

$$3 - 3[-(-3)^2 + 3 \times \frac{1}{2} - 9(\frac{1}{3})^3 - (-4)^2]$$

$$= 3 - 3[-9 + \frac{3}{2} - \frac{9}{27} - 16]$$

$$= 3 - 3[-9 + \frac{3}{2} - \frac{1}{3} - 16] = 3 - 3[-25 + \frac{9-2}{6}]$$

$$= 3 - 3[-25 + \frac{7}{6}] = 3 - 3[\frac{-150+7}{6}]$$

$$= 3 - 3 \times \frac{-143}{6} = 3 + \frac{143}{2} = \frac{149}{2}$$

با توجه به اعداد داده شده در صورت سؤال، اعداد صحیح بین -270 تا 311 باید شمارش شود. در این مجموعه 310 عدد مثبت و 269 عدد منفی و عدد صفر

۱ ۲ ۳ ۴ ۷

وجود دارد، یعنی تعداد کل این اعداد برابر است با:

$$۲۶۹ + ۱ + ۳۱۰ = ۵۸۰$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸

حالت‌های ممکن در پرتاب دو تاس:

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

$$\Rightarrow n(S) = ۳۶$$

حالت‌های مطلوب:

$$A = \{(1, 3), (1, 6), (4, 3), (4, 6), (6, 3), (6, 6)\} \Rightarrow n(A) = ۶$$

احتمال مطلوب:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۹

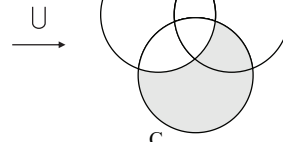
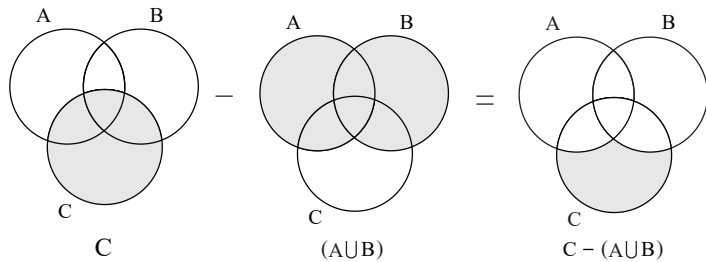
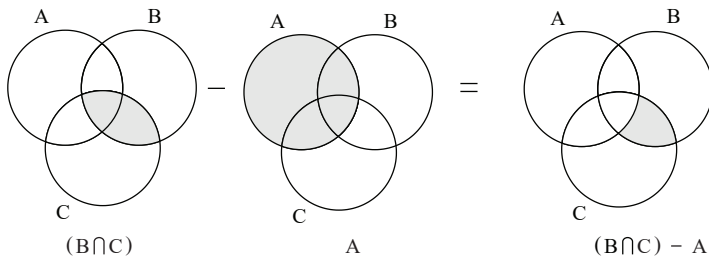
$$\frac{1 + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1 + \frac{2}{2}}{1 + \frac{2}{2}} = \frac{1 + \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{1 + \frac{4}{2}}{1 + \frac{4}{2}} = \frac{1 + \frac{5}{2}}{1 + \frac{5}{2}} = \frac{1 + \frac{6}{2}}{1 + \frac{6}{2}} = \frac{19}{12} = \frac{95}{24}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰
وقتی در مستطیلی، اندازه محیط، ۳ برابر طول مستطیل باشد، طول مستطیل، ۲ برابر عرض است و همه مستطیل‌هایی که طولشان دو برابر عرضشان باشد، با هم متشابهند.

طول: a ، عرض: b

$$\text{محیط} = ۲(a + b) = ۳a \Rightarrow a = ۲b$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱

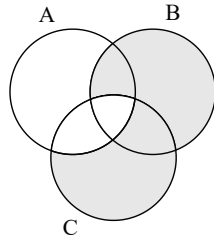


$$((B \cap C) - A) \cup (C - (A \cup B))$$

$$((B \cap C) - A) \cup (C - (A \cup B))$$

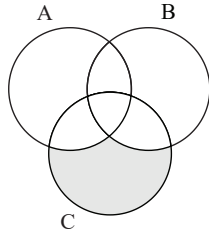
گزینه ۱۰

$(C - A) \cup (B - (C \cap A))$



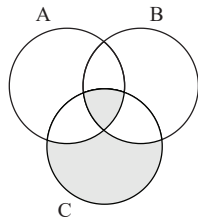
گزینه ۲

$(C - (A \cap C)) \cap (C - B)$



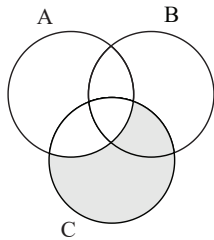
گزینه ۳

$(C \cap A \cap B) \cup (C - (A \cup B))$



گزینه ۴

$(C - (A \cap C)) \cap (C - (C \cap B \cap A))$



۱۲) برای این که رابطه $A - B = B - A$ برقرار باشد باید مجموعه‌های A و B برابر باشند.

۱۳) بنابراین از آن جا که اعداد حسابی غیر صفر همان اعداد طبیعی می‌باشند، دو مجموعه باهم برابر هستند.

۱۴) کافی است تعداد حالت‌هایی را که مجموع دو عدد کوچکتر مساوی ۴ می‌شود، محاسبه کنیم و از تعداد کل حالت‌ها که ۳۶ است، کم کنیم.

$A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$ (مجموع کوچکتر یا مساوی ۴)

بنابراین در $36 - 6 = 30$ حالت مجموع دو عدد ریشه بزرگتر از ۴ می‌باشد. در نتیجه:

$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$ (مجموع دو عدد ریشه بزرگتر از ۴)

۱۵) ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴

$S = \{10, 12, 14, \dots, 98\} \Rightarrow n(S) = 45$

$A = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\} \Rightarrow n(A) = 9$

$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}$

۱۶) فرض کنیم اعداد در نظر گرفته شده \sqrt{m} باشند. در نتیجه: $5 = \sqrt{25}$

$\Rightarrow \sqrt{5} < \sqrt{m} < \sqrt{25}$

توجه کنید که $\sqrt{6,25} = 2,5$ عددی گویا است.

۱۷) ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶

$|1 - \sqrt{3}| + \dots + |\sqrt{99} - \sqrt{101}|$

$$= \sqrt{101} - 1 + \sqrt{5} - \sqrt{5} + \sqrt{101} - \sqrt{49} = \sqrt{101} - 1$$

1 2 3 4 17

$$OA^2 = 1^2 + 3^2 \Rightarrow OA = \sqrt{10}$$

$$OB^2 = OA^2 + AB^2 = 10 + 4 = 14 \Rightarrow OB = \sqrt{14}$$

$$\Rightarrow OC = OB = \sqrt{14}$$

1 2 3 4 18

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} - \sqrt{(2\sqrt{5}-3)^2} = 2|2-\sqrt{5}| - |2\sqrt{5}-3| \\ & = 2(\sqrt{5}-2) - (2\sqrt{5}-3) = 2\sqrt{5}-4-2\sqrt{5}+3 = -1 \end{aligned}$$

1 2 3 4 19

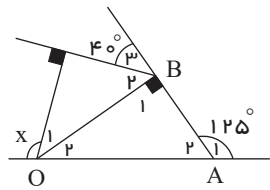
$$\hat{A}_1 + \hat{A}_r = 180^\circ \Rightarrow 125^\circ + \hat{A}_r = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}_r = 55^\circ$$

$$\hat{O}_r + \hat{B}_1 + \hat{A}_r = 180^\circ \Rightarrow \hat{O}_r + 90^\circ + 55^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{O}_r = 35^\circ$$

$$\hat{B}_1 + \hat{B}_r + \hat{B}_r = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \hat{B}_r + 40^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{B}_r = 50^\circ$$

$$\hat{O}_1 + \hat{C}_1 + \hat{B}_r = 180^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 + 90^\circ + 50^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 = 40^\circ$$

$$x + \hat{O}_1 + \hat{O}_r = 180^\circ \Rightarrow x + 40^\circ + 35^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 105^\circ$$



از سال هشتم به یاد داریم: 1 2 3 4 20

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + b^2 + ab + ab = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(10^{2n+3} + 3)^2 = (10^{2n+3})^2 + 3^2 + 2(3 \times 10^{2n+3})$$

$$= 10^{4n+6} + 9 + 6 \times 10^{2n+3} = \overbrace{100 \dots 600 \dots 9}^{\text{رقم } 4n+6}$$

$$\text{مجموع ارقام این عدد} = 1 + 6 + 9 = 16$$

1 2 3 4 21

$$\sqrt{\frac{2}{4}} \times \sqrt{\frac{4}{50}} - \sqrt{\frac{2}{9}} \times \sqrt{\frac{4}{50}} = \sqrt{\frac{2}{4} \times \frac{4}{50}} - \sqrt{\frac{2}{9} \times \frac{4}{50}} = \sqrt{\frac{1}{25}} - \sqrt{\frac{4}{9 \times 25}} = \frac{1}{5} - \frac{2}{3 \times 5} = \frac{3-2}{15} = \frac{1}{15}$$

1 2 3 4 22

$$A = \frac{\sqrt{2^2 \times 2} \times \sqrt{2^2 \times 2} \times \sqrt{2^2 \times 2} \times \sqrt{2^2 \times 2}}{\sqrt{2^6} \times \sqrt{2 \times 2^2}} = \frac{2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2}{2^3 \times 2 \times 2} = \frac{2^2 \times 2 \times 2 \times 2^2 \times 2}{2^3 \times 2 \times 2} = \frac{2^2}{2^2} = 1$$

1 2 3 4 23

$$\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{4}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} + \sqrt{8} - \sqrt{18} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 0$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۴

$$\frac{\left[-\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}\right]^{-3}}{\left(\frac{-2}{3}\right)^{-3}} = \frac{\left[-\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}\right]^{-3}}{\left(\frac{-2}{3}\right)^{-3}} = \frac{-\left(\frac{3}{5}\right)^6}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-6}} = -\left(\frac{3}{5}\right)^6 \times \left(\frac{2}{3}\right)^6 = -\left(\frac{2}{5} \times \frac{2}{3}\right)^6 = -\left(\frac{2}{5}\right)^6$$

در دو مثلث متشابه ضلع‌های متناظر، به ضلع‌هایی می‌گویند که روبرو به زاویه‌های مساوی قرار دارند مثلث AD و AC ضلع‌های متناظرند چون روبروی دو زاویه‌ی مساوی \widehat{B} و \widehat{E} قرار دارند.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۵

$$\frac{AD}{AC} = \frac{6,4}{16} = \frac{\frac{64}{10}}{16} = \frac{\cancel{64} \times 1}{\cancel{16} \times \cancel{16}} = \frac{2}{5}$$

روش اول:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{D}_1 = \widehat{C} \\ \widehat{A} = \widehat{A} \end{array} \right\} \xrightarrow{ز} \Delta ADE \sim \Delta ABC$$

روش دوم:

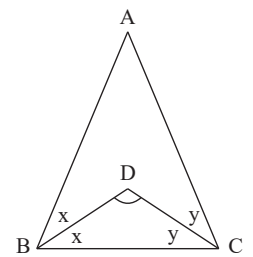
$$\frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC} \rightarrow \frac{6,4}{16} = \frac{2}{5}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۶

$$\frac{4,5}{6} = \frac{6}{a} \Rightarrow 4,5a = 6 \times 6 \Rightarrow 4,5a = 36 \Rightarrow a = 8$$

$$\text{محیط مثلث بزرگتر} = 12 + 8 + 6 = 26$$

باتوجه به شکل برای مثلث ABC داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۷



حال برای مثلث BDC داریم:

$$\begin{aligned} \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} &= 180^\circ \\ 42 + 2x + 2y &= 180^\circ \\ \Rightarrow 2x + 2y &= 180^\circ - 42^\circ \\ \Rightarrow 2x + 2y &= 138^\circ \\ \Rightarrow 2(x + y) &= 138^\circ \\ \Rightarrow x + y &= 69^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{BDC} + x + y &= 180^\circ \\ \Rightarrow \widehat{BDC} + 69^\circ &= 180^\circ \\ \Rightarrow \widehat{BDC} &= 180^\circ - 69^\circ = 111^\circ \end{aligned}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۸

$$\begin{aligned} 84,8 \times 10^8 \times 125 &= 84,8 \times 12,5 \times 10^8 = 10600 \times 10^8 \\ &= 1,06 \times 10^4 \times 10^8 = 1,06 \times 10^{12} \end{aligned}$$

تنها عبارت (الف) صحیح است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۹

صورت و مخرج عبارت B را برحسب پایه‌های ۲ می‌نویسیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۰

$$\begin{aligned} B &= \frac{4^x + 2^x - 2^{3x+2}}{8^x} = \frac{(2^2)^x + 2^x - 2^{3x} \times 2^2}{(2^3)^x} \\ &= \frac{(2^x)^2 + 2^x - (2^x)^3 \times 2^2}{(2^x)^3} \stackrel{2^x=1}{=} \frac{10^2 + 10 - 10^3 \times 2^2}{10^3} \\ &= \frac{110 - 4000}{1000} = \frac{-3890}{1000} = -3,89 \end{aligned}$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴

۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴

۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴

۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴



۱) حاصل عبارت روبرو کدام است؟

$$\frac{x-8}{x^2-x-6} + \frac{x-2}{x-3}$$

۴) $\frac{x+3}{x+2}$

۳) $\frac{x-2}{x-3}$

۲) $\frac{x-4}{x-3}$

۱) $\frac{x+4}{x+2}$

۲) اگر $x^2 + 3x + 2 = 0$ حاصل $(x-1)(x+4)$ کدام است؟

۴) ۲

۳) -۶

۲) ۶

۱) صفر

۳) مساحت شکل حاصل از برخورد خطوط $y = 1$ و $2y - 3x = 6$ و $3y + 2x = 9$ کدام گزینه است؟ (نمونه دولتی - چهارمحال و بختیاری و فارس ۹۶ - ۹۵)

۴) $\frac{26}{3}$

۳) $\frac{13}{3}$

۲) $\frac{5}{3}$

۱) $\frac{10}{3}$

۴) کدام عبارت در تجزیه چندجمله‌ای $9x^3 + 15x^2 - 6x$ وجود ندارد؟

۴) $3x+1$

۳) $3x+6$

۲) $3x-1$

۱) x

۵) اگر $a > b > 0$, $c > 0$, کدام نامساوی همواره صحیح است؟

۴) گزینه‌های ۱ و ۳ صحیح است.

۳) $\frac{1}{ac} < \frac{1}{bc}$

۲) $ac < bc$

۱) $ac > bc$

۶) معادله‌ی خط موازی محور y ها گذرنده بر نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ کدام است؟ (نمونه دولتی - مرکزی و ایلام ۹۶ - ۹۵)

۴) $y = 1$

۳) $x = -1$

۲) $x = 2$

۱) $y = 2$

۷) اگر $a + \frac{1}{a} = 3$ باشد حاصل $a^4 + \frac{1}{a^4}$ کدام است؟

۴) ۵۱

۳) ۴۷

۲) ۴۹

۱) ۸۱

۸) حاصل عبارت زیر کدام گزینه است؟ (همهٔ مخارجها مخالف صفر هستند.)

$$\frac{a^2 - 80}{a^2 - 16} + \frac{a - 4}{a + 4} =$$

۴) $\frac{a-8}{a-2}$

۳) $\frac{a-8}{a-4}$

۲) $\frac{2a-8}{a-4}$

۱) $\frac{2a-16}{a-4}$

۹) معادلهٔ خطی که از محل برخورد دو خط $y - x = 1$ و $y + x = 7$ بگذرد و عرض از مبدأ آن -۵ باشد، کدام است؟

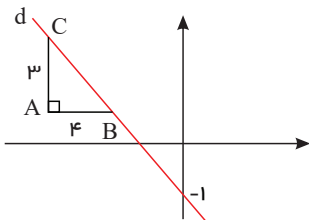
۴) $y = 3x - 5$

۳) $y = 3x + 5$

۲) $y = -3x + 5$

۱) $y = -3x - 5$

۱۰) باتوجه به شکل معادلهٔ خط d کدام است؟



۲) $y = \frac{4}{3}x - 2$

۱) $3y = 4x + 1$

۴) $y = \frac{-3}{4}x - 1$

۳) $y = \frac{-4x}{3} - 1$

۱۱) کدام گزینه مجموعه جواب نامعادله $1 - \frac{x-1}{2} \leq \frac{x+1}{3}$ را نشان می‌دهد؟

- ۱) $\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{11}{5} \leq x\}$ ۲) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{11}{5}\}$ ۳) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$ ۴) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x\}$

۱۲) به ازای چه مقدار a ، نقطه $M = \begin{bmatrix} -6a \\ a+3 \end{bmatrix}$ روی خطی قرار دارد که محور عرض را در -1 قطع کند و موازی خط مبدأ گذری باشد که از نقطه عبور می‌کند؟

- ۱) ۲ ۲) -2 ۳) $\frac{4}{11}$ ۴) $-\frac{5}{9}$

۱۳) در رابطه مقدار n کدام گزینه است؟

$$\frac{1}{4 \times 7} + \frac{1}{7 \times 10} + \frac{1}{10 \times 13} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{5}{64}$$

۱) ۱۶ ۲) ۲۳ ۳) ۱۹ ۴) ۲۱

۱۴) اگر عبارت گویای $\frac{4x+3}{x^2+ax+b}$ به ازای مقادیر $x=1$ و $x=-3$ تعریف نشده باشد، حاصل $a-b$ کدام گزینه است؟

- ۱) ۱ ۲) ۵ ۳) -5 ۴) -1

۱۵) عرض از مبدأ خط گذرنده از دو نقطه $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{11}{3}$ ۳) $\frac{19}{3}$ ۴) $-\frac{19}{3}$

۱۶) حاصل $1 + 10001 \times 101 \times 11 \times 9$ با استفاده از اتحادها کدام است؟

- ۱) 10^4 ۲) 10^6 ۳) 10^8 ۴) 10^{10}

۱۷) کم‌ترین مقدار عبارت $a^2 + 8a + 20$ کدام است؟

- ۱) ۴ ۲) ۱۴ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴

۱۸) ساده شده عبارت $\frac{\frac{1}{1-x} - \frac{x}{1+x}}{\frac{1}{1+x} + \frac{x}{1-x}}$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) x ۳) $1-x$ ۴) $1+x$

۱۹) حاصل عبارت $X(X-1)(X+3)(X-4) + 36$ کدام گزینه است؟

- ۱) $(X^2 - X - 6)^2$ ۲) $(X+1)^4$ ۳) $(X^2 - 6X + 1)^2$ ۴) $(X^2 + 1)^2$

۲۰) شیب خطی که بردار $\begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix}$ روی آن قرار دارد چند است؟

- ۱) -4 ۲) ۷ ۳) $\frac{7}{4}$ ۴) $-\frac{7}{4}$

۲۱) به ازای چند عدد طبیعی، نامعادله $(x-2) + 2(x-2)^2 \geq 2x(x-3) + 2$ جواب دارد؟

- ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) بی‌شمار

۲۲) در تساوی مقابل، $a+b$ چند می‌شود؟

- ۱) ۳ ۲) -5 ۳) -3 ۴) ۵

$$5^{a-3b-7} = 7^{2a-7b-15}$$

۲۳) اگر عبارت گویای $\frac{a+12}{a^2x-10a+12}$ به ازای $a = -2$ تعریف نشده باشد، آنگاه x چند است؟

- ۱) ۸ ۲) -۸ ۳) ۰ ۴) -۵

۲۴) در تجزیه عبارت $x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36$ کدام عامل وجود ندارد؟

- ۱) $x+4$ ۲) $x-3$ ۳) $x-2$ ۴) $x+1$

۲۵) مختصات محل تقاطع دو خط $x = \frac{1}{5}y$ و $3y + 5x = 6$ کدام است؟

- ۱) $\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

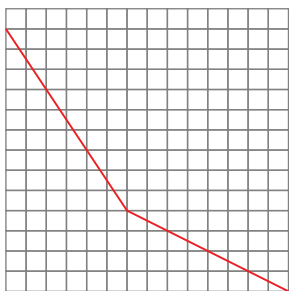
۲۶) در معادله خط $ax + by + c = 0$ اگر $ab > 0$ و $bc < 0$ نمودار خط به کدام صورت خواهد بود؟



۲۷) کدام یک از عامل‌های زیر در تجزیه عبارت $(x^2 - 5x + 6) + (x^2 - x - 2)$ وجود دارد؟

- ۱) $x-1$ ۲) $2x+2$ ۳) $x+2$ ۴) $x-3$

۲۸) یک مخزن استوانه‌ای آب، دوازده شیر خروجی دارد که همواره با سرعتی ثابت و برابر از آن‌ها آب خارج می‌شود. می‌دانیم تعدادی از شیرهای خروجی مخزن هم‌زمان از کار افتاده‌اند. اگر تصویر زیر بخشی از نمودار ارتفاع آب این مخزن برحسب زمان باشد چه تعداد از شیرهای خروجی از کار



افتاده‌اند؟

- ۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۲۹) در یک آزمون ریاضی، ۳۰ سؤال طراحی شده است. هر پاسخ صحیح دارای ۴ امتیاز مثبت و هر پاسخ اشتباه دارای ۲ امتیاز منفی است و پرسش

بدون پاسخ، امتیازی ندارد. نسیم در این آزمون، امتیاز ۴۶ را کسب کرده است. او حداکثر به چند پرسش پاسخ داده است؟

- ۱) ۱۱ ۲) ۱۷ ۳) ۲۰ ۴) ۲۸

۳۰) اگر دو جمله $\sqrt[3]{6}a^{(2m+3n-3)}b^{(2m-3n)}$ و $\frac{2}{3}a^{(n+4m-6)}b^{(3n-5)}c^{(k-6)}$ متشابه باشند، حاصل $3n + 2m - 2k$ برابر کدام گزینه است؟

- ۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

پاسخنامه تشریحی

۱ ۲ ۳ ۴ ۱

$$\frac{x-8}{x^2-1} + \frac{x-2}{x-3}$$

ضرب دو عدد جمع دو عدد

$$= \frac{x-8}{(x-3)(x+2)} + \frac{x-2}{x-3} = \frac{(x-8) + (x+2)(x-2)}{(x-3)(x+2)} = \frac{x-8+x^2-4}{(x-3)(x+2)}$$

$$= \frac{x^2+x-12}{(x-3)(x+2)} = \frac{(x+4)(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{(x+4)}{(x+2)}$$

چون حاصل $x^2 + 3x + 2 = 0$ است، می‌توانیم از حاصل $(x-1)(x+4)$ کم کنیم، بدون اینکه حاصل آن تغییری کند. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲

$$(x-1)(x+4) - (x^2 + 3x + 2) = x^2 + 3x - 4 - x^2 - 3x - 2 = -6$$

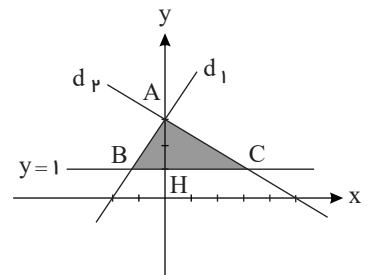
راه حل دوم:

$$\left. \begin{aligned} (x-1)(x+4) &= x^2 + 3x - 4 \\ x^2 + 3x + 2 &= 0 \Rightarrow x^2 + 3x = -2 \\ x^2 + 3x - 4 &= -2 - 4 = -6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$d_1: 2y - 3x = 6 \rightarrow \begin{array}{c|c|c} x & y & \\ \hline 0 & 3 & -2 \\ \hline \end{array}$$

$$d_2: 3y + 2x = 9 \rightarrow \begin{array}{c|c|c} x & y & \\ \hline 0 & 3 & 1 \\ \hline \end{array}$$

خطها را رسم می‌کنیم. برای این کار باید از هر خط دو نقطه را مشخص نماییم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۳



برای پیدا کردن مساحت مثلث ABC نیاز است که محل برخورد خط $y=1$ با خطهای d_1 و d_2 را مشخص کنیم:

$$\left. \begin{aligned} d_2: 3y + 2x = 9 \\ y = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3 \times 1 + 2x = 9 \rightarrow 2x = 6 \rightarrow x = 3 \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} d_1: 2y - 3x = 6 \\ y = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2 \times 1 - 3x = 6 \rightarrow -3x = 4 \rightarrow x = \frac{-4}{3} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین اندازه‌ی پاره‌خط BC برابر است با فاصله‌ی بین نقطه‌ی C و نقطه‌ی B . بنابراین داریم:

$$\text{طول } BC = \frac{4}{3} + 3 = \frac{13}{3}$$

پس مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{BC \times AH}{2} = \frac{\frac{13}{3} \times 2}{2} = \frac{13}{3}$$

ابتدا از x در عبارت فاکتور می‌گیریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۴

$$x(9x^2 + 15x - 6) = x(3x+6)(3x-1)$$

عبارت $3x+1$ در تجزیه‌ی این عبارت وجود ندارد.

باتوجه به اطلاعات مسئله a و b و c هر سه مثبت و $a > b$ است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$a > b$ اگر طرفین نامعادله را در یک عدد مثبت ضرب کنیم، جهت نامعادله تغییر نمی‌کند.

$$a > b \xrightarrow{\times c} ac > bc$$

اگر دو عدد علامت یکسانی داشته باشند و اگر طرفین نامعادله را معکوس کنیم، جهت نامعادله برعکس می‌شود. یعنی:

$$ac > bc \Rightarrow \frac{1}{ac} < \frac{1}{bc}$$

پس گزینه ۱ و گزینه ۳ هر دو صحیح هستند.

نکته: معادله‌ی خط موازی محور y ها به صورت کلی $x = k$ است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۶

طبق نکته‌ی گفته شده، معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ می‌گذرد و موازی محور y ها است، برابر $x = -1$ است.

ابتدا دو طرف $a + \frac{1}{a} = 3$ را به توان ۲ می‌رسانیم: (۱) (۲) (۳) (۴) (۷)

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = (3)^2 \Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 = 9 \Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} = 7$$

دوباره دو طرف عبارت را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$a^4 + \frac{1}{a^4} + 2 = 49 \Rightarrow a^4 + \frac{1}{a^4} = 47$$

حاصل را به ساده‌ترین صورت می‌نویسیم: (۱) (۲) (۳) (۴) (۸)

$$\frac{a^2 - 10}{a^2 - 16} + \frac{a - 4}{a + 4} = \frac{a^2 - 10 + (a - 4)^2}{(a + 4)(a - 4)} =$$

$$\frac{a^2 - 10 + a^2 + 16 - 8a}{a^2 - 16} = \frac{2a^2 - 8a + 6}{a^2 - 16} =$$

$$\frac{2(a^2 - 4a - 3)}{(a - 4)(a + 4)} = \frac{2(a - 8)(a + 4)}{(a - 4)(a + 4)} = \frac{2a - 16}{a - 4}$$

ابتدا مختصات محل برخورد دو خط $y - x = 1$ و $x + y = 7$ را به دست می‌آوریم: (۱) (۲) (۳) (۴) (۹)

$$\begin{cases} y + x = 7 \\ y - x = 1 \end{cases} \Rightarrow y + x = 7 \stackrel{y=4}{\Rightarrow} 4 + x = 7 \Rightarrow x = 3$$

$$2y = 8 \Rightarrow y = 4$$

پس مختصات محل برخورد این دو خط $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ است.

عرض از مبدأ این خط ۵- است، یعنی این خط از نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}$ نیز می‌گذرد. حال شیب خط را از این دو نقطه به دست می‌آوریم:

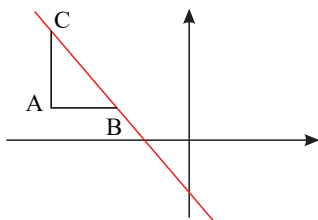
$$\text{شیب خط} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - (-5)}{3 - 0} = \frac{9}{3} = 3$$

حال معادله خط را با شیب ۳ و عرض از مبدأ ۵- می‌نویسیم.

$$y = 3x - 5$$

اول باید بررسی کنیم که در کدام گزینه‌ها صدق می‌کند. در معادله‌های خطی گزینه‌های ۳ و ۴ نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ صدق می‌کند. نکته: شیب خط برابر است (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۰)

با: نسبت ضلع مقابل به ضلع مجاور مثلث در مثلث ABC یعنی نسبت $\frac{AC}{AB}$.



$$\text{شیب} = \left| \frac{3}{4} \right|$$

$$y = -\frac{3}{4}x - 1$$

چون باتوجه به شکل شیب منفی است، پس معادله خط به صورت:

نامعادله را حل می‌کنیم و مجموعه جواب آن را به دست می‌آوریم: (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۱)

$$\frac{-2 - x + 1}{2} \leq \frac{x + 1}{3} \rightarrow \frac{-x - 1}{2} \leq \frac{x + 1}{3}$$

$$+3(-x - 1) \leq 2(x + 1)$$

$$-3x - 3 \leq 2x + 2$$

$$-5 \leq 5x$$

$$-\frac{5}{5} \leq x \rightarrow -1 \leq x$$

دو طرف نامعادله را در عدد ۶ ضرب می‌کنیم:

مجموعه جواب = $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x\}$

می‌دانیم خط‌های موازی، شیب‌های برابر دارند. شیب خط گذرنده از دو نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$ را به دست می‌آوریم:

$$\text{شیب} = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{-4 - 0} = -\frac{1}{2}$$

خط مورد نظر برابر است با:

$$y = -\frac{1}{2}x - 1$$

حال نقطه M را در این خط جایگذاری می‌کنیم:

$$a + 3 = -\frac{1}{2}(-2a) - 1 \Rightarrow a + 3 = a - 1 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

رابطه صورت سؤال مربوط به کسرهای تلسکوپی است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۳)

$$\frac{1}{4 \times 7} + \frac{1}{7 \times 10} + \frac{1}{10 \times 13} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

عبارت بالا را در ۳ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{3}{4 \times 7} + \frac{3}{7 \times 10} + \frac{3}{10 \times 13} + \dots + \frac{3}{(3n-2)(3n+1)}$$

و کسرها را به صورت زیر تفکیک می‌کنیم:

$$\frac{3}{4 \times 7} = \frac{7-4}{4 \times 7} = \frac{7}{4 \times 7} - \frac{4}{4 \times 7} = \frac{1}{4} - \frac{1}{7}$$

سایر کسر را نیز مانند نمونه تفکیک می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{4 \times 7} + \frac{3}{7 \times 10} + \frac{3}{10 \times 13} + \dots + \frac{3}{(3n-2)(3n+1)} = \\ & \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} = \\ & \frac{1}{4} - \frac{1}{3n+1} \end{aligned}$$

حال عبارت به دست آمده را در $\frac{1}{3}$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3n+1} \right) &= \frac{1}{12} - \frac{1}{9n+3} = \frac{5}{64} \Rightarrow \frac{1}{12} - \frac{5}{64} = \frac{1}{9n+3} \\ \frac{16-15}{192} &= \frac{1}{9n+3} \Rightarrow 192 = 9n+3 \Rightarrow 9n = 189 \Rightarrow n = 21 \end{aligned}$$

چون کسر به ازای $x = 1$ و $x = -3$ تعریف نشده است، پس این دو ریشه‌های مخرج هستند و به ازای آن‌ها مخرج صفر می‌شود. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۴)

$$x = 1 \rightarrow (1)^2 + a(1) + b = 0 \rightarrow a + b = -1 \quad (I)$$

$$x = -3 \rightarrow (-3)^2 + (-3)a + b = 0 \rightarrow -3a + b = -9 \quad (II)$$

دو عبارت (I) و (II) را در دستگاه معادله خط قرار داده و a و b را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ -3a + b = -9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cancel{a} + 3b = -3 \\ -\cancel{a} + b = -9 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} & 4b = -12 \rightarrow b = -3 \\ & a + b = -1 \xrightarrow{b=-3} a - 3 = -1 \Rightarrow a = 2 \end{aligned}$$

$$a - b = 2 - (-3) = 2 + 3 = 5$$

ابتدا معادله خط را به دست می‌آوریم. برای این کار به شیب خط نیاز داریم که به صورت زیر به دست می‌آید: (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۵)

$$\text{شیب} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 3}{2 - (-1)} = \frac{2}{3}$$

فرم کلی معادله خط به صورت $y = ax + b$ است که a برابر با شیب خط است که همان $\frac{2}{3}$ است.

$$y = \frac{2}{3}x + b$$

یکی از نقاط را به دلخواه در $y = \frac{2}{3}x + b$ قرار می‌دهیم تا b به دست آید:

$$y = \frac{2}{3}x + b \xrightarrow{\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}} 5 = \frac{2}{3}(2) + b$$

$$5 - \frac{4}{3} = b \Rightarrow b = \frac{11}{3}$$

برای به دست آوردن عرض از مبدأ به جای x در معادله $\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$ صفر قرار می‌دهیم:

$$y = \frac{2}{3}(0) + \frac{11}{3} \rightarrow y = \frac{11}{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶

$$9 \times 11 \times 101 \times 10001 + 1$$

$$= (10 - 1)(10 + 1)(100 + 1)(10000 + 1) + 1$$

$$= (10 - 1)(10 + 1)(10^2 + 1)(10^4 + 1) + 1$$

$$= (10^2 - 1)(10^2 + 1)(10^4 + 1) + 1 =$$

$$(10^4 - 1)(10^4 + 1) + 1 = 10^8 - 1 + 1 = 10^8$$

$$a^2 + 8a + 20 = a^2 + 8a + 16 + 4 = (a + 4)^2 + 4$$

کم‌ترین مقدار زمانی اتفاق می‌افتد که عبارت داخل پرانتز برابر صفر شود. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸

$$\frac{1}{1-x} - \frac{x}{1+x} = \frac{1+x-x(1-x)}{(1-x)(1+x)} =$$

$$\frac{1}{1+x} + \frac{x}{1-x} = \frac{1-x+x(1+x)}{(1+x)(1-x)} =$$

$$\frac{1+x-x+x^2}{(1-x)(1+x)} = \frac{1+x^2}{(1-x)(1+x)} = 1$$

$$\frac{1-x+x+x}{(1+x)(1-x)} = \frac{1+x^2}{(1+x)(1-x)}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹

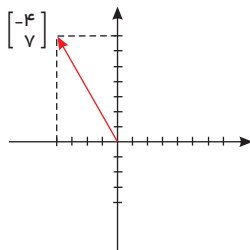
$$x(x-1)(x+3)(x-4) + 36 = (x^2-x)(x+3)(x-4) + 36 = (x^2-x)(x^2-x-12) + 36$$

$$= x^4 - x^3 - 12x^2 - x^3 + x^2 + 12x + 36 =$$

$$x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36 = (x^2 - x - 6)^2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰

ابتدا بردار $\begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix}$ را رسم می‌کنیم. به این صورت که از مبدأ مختصات خطی تا نقطه $\begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix}$ رسم می‌کنیم:



$$\text{شیب خط} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 7}{0 - (-4)} = -\frac{7}{4}$$

$$\text{شیب خط} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$(x - 2) + 2(x - 2)^2 \geq 2x(x - 3) + 2$$

$$x - 2 + 2(x^2 - 4x + 4) \geq 2x^2 - 6x + 2$$

$$x - 2 + 2x^2 - 8x + 8 \geq 2x^2 - 6x + 2$$

$$-7x + 6 \geq -6x + 2$$

این خط از $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix}$ می‌گذرد، پس شیب آن عبارت است از:

نکته: شی خط با داشتن دو نقطه از خط رابطه زیر به دست می‌آید:

نامعادله را حل می‌کنیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۱

$$\Rightarrow -7x + 6x \geq 2 - 6$$

$$\Rightarrow -x \geq -4$$

$$\Rightarrow x \leq 4$$

اعداد طبیعی که به جای x می‌توان قرار داد، اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ هستند.

تنها در صورتی این تساوی $5^{a-3b-7} = 7^{2a-7b-15}$ برقرار است که توان آنها صفر باشد و حاصل هر دو ۱ شود، پس داریم:

$$\begin{cases} a - 3b - 7 = 0 \\ 2a - 7b - 15 = 0 \end{cases}$$

دستگاه بالا را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} a - 3b = 7 \\ 2a - 7b = 15 \end{cases} \times (-2) \begin{cases} -2a + 6b = -14 \\ 2a - 7b = 15 \\ \hline -b = 1 \Rightarrow b = -1 \end{cases}$$

$$2a - 7(-1) = 15 \rightarrow 2a = 8 \rightarrow a = 4$$

$$\Rightarrow a + b = -1 + 4 = 3$$

هر عبارت گویا به ازای مقادیری که مخرج آن صفر شود، تعریف نشده است. پس مخرج کسر به ازای $a = -2$ باید برابر صفر شود.

$$a^2x - 10a + 12 = 0 \xrightarrow{a=-2} 4x + 20 + 12 = 0$$

$$4x = -32$$

$$x = -8$$

نکته: اگر ریشهٔ مقسوم‌علیه در مقسوم صدق کند، یعنی عامل مقسوم‌علیه در تجزیهٔ مقسوم وجود دارد.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: با جایگذاری:

$$x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$$

$$(-4)^6 - 14(-4)^4 + 49(4)^2 - 36 = 4096 - 3584 + 784 - 36 = 1260$$

پس $x + 4$ در تجزیهٔ عبارت وجود ندارد.

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

با جایگذاری ۳ داریم:

$$3^6 - 14(3)^4 + 49(3)^2 - 36 = 729 - 1134 + 441 - 36 = 0$$

پس عامل $x - 3$ وجود دارد.

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

با جایگذاری ۲ در عبارت $x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36$ داریم:

$$2^6 - 14(2)^4 + 49(2)^2 - 36 = 64 - 224 + 196 - 36 = 0$$

پس عامل $x - 2$ وجود دارد.

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

با جایگذاری -۱ در عبارت $x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36$ داریم:

$$(-1)^6 - 14(-1)^4 + 49(-1)^2 - 36 = 1 - 14 + 49 - 36 = 0$$

پس عامل $x + 1$ وجود دارد.

با استفاده از دستگاه معادلهٔ خط مختصات نقطهٔ تقاطع دو خط را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 3y + 5x = 6 \\ x - \frac{1}{5}y = 0 \end{cases}$$

معادلهٔ خط دوم را در -5 ضرب می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} \left\{ \begin{array}{l} 3y + 5x = 6 \\ -5x + y = 0 \end{array} \right. \\ \hline 4y = 6 \rightarrow y = \frac{3}{2} \end{array}$$

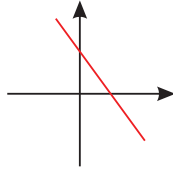
$$\text{نقطهٔ تقاطع} = \left[\begin{array}{c} \frac{3}{2} \\ 10 \\ \frac{3}{2} \end{array} \right]$$

ابتدا معادلهٔ خط را به صورت استاندارد می‌نویسیم.

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow by = -ax - c \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

شیب خط منفی $= -\frac{a}{b}$ $ab > 0$ هم علامت a, b

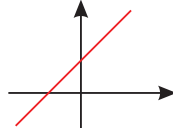
عرض از مبدأ مثبت $= -\frac{c}{b}$ $bc < 0$ غیر هم علامت c, b



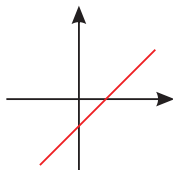
فقط در گزینه ۱ شیب خط منفی و عرض از مبدأ مثبت است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

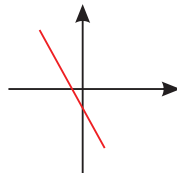
گزینه ۲: شیب مثبت عرض از مبدأ مثبت



گزینه ۳: شیب مثبت عرض از مبدأ منفی



گزینه ۴: شیب منفی عرض از مبدأ منفی



۱ ۲ ۳ ۴ ۲۷

$$(x^2 - 5x + 6) + (x^2 - x - 2) = (x - 2)(x - 3) + (x - 2)(x + 1) = (x - 2)((x - 3) + (x + 1)) = (x - 2)(2x - 2) = 2(x - 2)(x - 1)$$

شیب‌ها برابر با $\frac{1}{3}$ و $\frac{3}{1}$ هستند. بنابراین قدرت خروج ثلث حالت قبلی است. بنابراین تعداد شیرها ثلث حالت قبلی و ۴ تا است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۸

برای هر سؤال ۳ حالت داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۹

پاسخ درست x

پاسخ نادرست y

بدون پاسخ z

$$\Rightarrow x + y + z = 30$$

$$4x - 2y = 46$$

هر پاسخ +۴ و هر پاسخ نادرست -۲ امتیاز در این صورت:

با توجه به گزینه‌ها می‌بینیم بزرگترین عدد ۲۸ است. پس فرض می‌کنیم:

$$\times 2 \begin{cases} x + y = 28 \\ 4x - 2y = 46 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 56 \\ 4x - 2y = 46 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6x = 102 \rightarrow x = \frac{102}{6} = 17 \rightarrow y = 11 \end{cases}$$

سایر گزینه‌ها اگر در شرایط معادله صدق هم کند حداکثر نیست پس پاسخ گزینه ۴ است.

توان‌های a با هم b با هم c با هم باید برابر باشد. ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۰

$$\begin{aligned} K - 6 = 0 &\rightarrow K = 6 \\ 3n - 5 = 2m - 3n &\rightarrow \begin{cases} 6n - 2m = 5 \\ -2n + 2m = 3 \end{cases} \\ n + 4m - 6 = 2m + 3n - 3 &\rightarrow \begin{cases} 4n = 8 \rightarrow n = 2 \\ 2m = 6n - 5 = 12 - 5 = 7 \end{cases} \\ 3n + 2m - 2K = 6 + 7 - 12 &= 1 \end{aligned}$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴

۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴

۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴

۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴



۱ اگر ۲۱ عدد صحیح از کوچک به بزرگ با فاصله یکسان از هم داشته باشیم، که عدد اول ۳- و عدد آخر ۵۷ باشند، فاصله بین هر دو عدد متوالی کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۲ برای یافتن اعداد اول ۱ تا ۱۰۰، الگوریتم غربال را به کار می‌بریم. ۶۲مین عددی که خط می‌خورد کدام است؟

- ۳۹ (۱) ۷۵ (۲) ۶۹ (۳) ۴۵ (۴)

۳ نقطه‌ی $\begin{bmatrix} 6 \\ -8 \end{bmatrix}$ مفروض است. فاصله‌ی این نقطه از مبدأ چند برابر فاصله از محور طول‌هاست؟

- $\frac{5}{3}$ (۱) $-1,25$ (۲) $1,25$ (۳) $-\frac{5}{3}$ (۴)

۴ حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\frac{1}{2 \times 4} - \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{4 \times 6} - \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{48 \times 50} - \frac{1}{49 \times 51} = ?$$

- $\frac{105}{24 \times 51}$ (۱) $\frac{106}{25 \times 51}$ (۲) $\frac{103}{25 \times 51}$ (۳) $\frac{104}{24 \times 51}$ (۴)

۵ حاصل جمع کوچک‌ترین عدد صحیح منفی چهاررقمی زوج با بزرگ‌ترین عدد صحیح منفی سه رقمی مضرب ۳ کدام است؟

- ۹۸۹۶ (۱) -۱۰۹۹۸ (۲) -۱۱۱۲۰ (۳) -۱۰۱۰۰ (۴)

۶ حاصل عبارت مقابل، کدام است؟

$$102 + 105 + 108 + \dots + 300 = ?$$

- ۲۳۴۶۷ (۱) ۱۳۴۶۷ (۲) ۱۳۱۶۷ (۳) ۱۳۴۳۷ (۴)

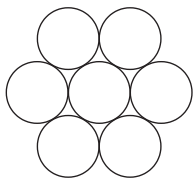
۷ در مورد عبارت $A = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots$ کدام گزینه درست است؟

- $\frac{1}{4} < A < \frac{5}{3}$ (۴) $1 < A < \frac{4}{3}$ (۳) $\frac{1}{4} < A < \frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4} < A < 1$ (۱)

۸ قرینه a ، عدد $-b$ و قرینه b ، عدد $-c$ است. اگر قرینه $-c$ نیز $+d$ باشد، قرینه $a + c$ کدام می‌تواند باشد؟ (d, c, b, a مخالف صفر هستند).

- $b + d$ (۱) $a + b - 2c$ (۲) $-b + d$ (۳) $b + d - 4c$ (۴)

۹ شعاع هر ۷ دایره کوچک در شکل مقابل برابر ۱ است. دایره بزرگ از نقطه‌های مماس شدن دایره‌های کوچک می‌گذرد. شعاع دایره بزرگ چقدر است؟



- ۲ (۱) $\sqrt{5}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۴)

۱۰ اندازه هر زاویه داخلی یک n ضلعی منتظم از ۴ برابر زاویه مکملش 30° بیشتر است. تعداد اضلاع آن کدام است؟

- ۱۲ (۱) ۱۰ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴)

۱۱) حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{99}\right) = ?$$

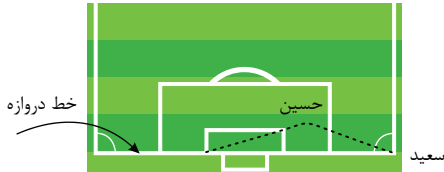
۴) $\frac{99}{100}$

۳) $\frac{1}{100}$

۲) $\frac{98}{99}$

۱) $\frac{1}{99}$

۱۲) مطابق شکل زیر سعید می‌خواهد از گوشه زمین به حسین پاس بدهد تا حسین توپ را به تیر دروازه بزند. حسین، از فاصله ۵ متری خط دروازه، در چه فاصله‌ای از سعید بایستد تا توپ در مجموع کوتاه‌ترین مسیر ممکن را طی می‌کند؟ (می‌دانیم عرض این زمین فوتبال ۴۰ متر و طول دروازه ۸ متر است)



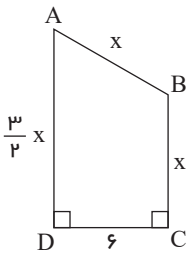
۲) ۸ متر

۱) ۶ متر

۴) ۱۳ متر

۳) ۱۲ متر

۱۳) محیط شکل مقابل کدام است؟



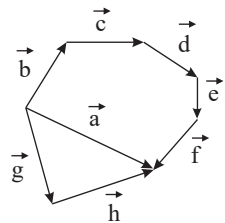
۲) $\sqrt{48} + 6$

۱) $4\sqrt{3}$

۴) $20\sqrt{3}$

۳) $14\sqrt{3} + 6$

۱۴) حاصل جمع تمام بردارها در شکل زیر برابر کدام گزینه است؟



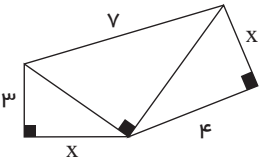
۲) $2\vec{a}$

۱) \vec{a}

۴) \vec{b}

۳) $3\vec{a}$

۱۵) در شکل زیر، x کدام است؟



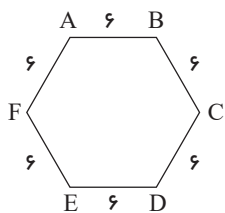
۲) $2\sqrt{3}$

۱) ۲

۴) ۳

۳) $\sqrt{7}$

۱۶) در شکل زیر مساحت ۶ ضلعی کدام است؟ (در مثلث متساوی‌الاضلاع ارتفاع، ضلع را به قسمت‌های مساوی تقسیم می‌کند).



۲) $6 \times \sqrt{27}$

۱) $18 \times \sqrt{27}$

۴) $\sqrt{48}$

۳) $9 \times \sqrt{27}$

۱۷) کدام گزینه عددی گویا برابر با $\frac{41}{40}$ است؟

۴) $\frac{1886}{4600}$

۳) $\frac{1927}{4600}$

۲) $\frac{1845}{4600}$

۱) $\frac{1968}{4600}$

۱۸) در جدول زیر، اگر حاصل جمع عددهای هر ردیف، با مجموع عددهای هر ستون مساوی باشد، $2a - b$ کدام است؟

۴	+۲	b
-۶	-۲	
۸	a	

۴) ۱۴

۳) ۱۲

۲) ۱۰

۱) ۸

۱۹) کدام عدد از بقیه بزرگتر است؟

۴) $\frac{5}{11}$

۳) $\frac{2}{7}$

۲) $\frac{9}{20}$

۱) ۰٫۴

۲۰ دوازده برابر حاصل عبارت $A = \frac{2}{5} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{6} \right) \left(\frac{2}{3} + \left(2\frac{1}{2} \right) \left(\frac{3}{5} \right) \right)$ کدام است؟

۹۱
۹۰ (۴)

۱۸۲
۱۵ (۳)

۹۱
۱۸۰ (۲)

۹۱
۱۵ (۱)

۲۱ حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\frac{-3}{\left(\frac{-2}{5}\right) \left(\frac{-4}{7}\right)} \times \frac{(-24) \times \frac{2}{6} + 4}{(-8) \times \left(\frac{4}{4}\right) - 2} = ?$$

۴
۱۵ (۴)

۷
۱۵ (۳)

۱۵
۷ (۲)

۱۵
۴ (۱)

۲۲ حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{4 \times 6} + \dots + \frac{1}{98 \times 100} = ?$$

۵ - ۱۹۹
۶ ۹۸ × ۲۰۰ (۴)

۵ - ۱۹۹
۲ × ۶ ۹۹ × ۲۰۰ (۳)

۵ - ۱۹۹
۶ ۹۸ × ۱۰۰ (۲)

۵ - ۱۹۹
۲ × ۶ ۹۹ × ۱۰۰ (۱)

۲۳ در عبارت $(-1)^1 + (+1)^2 + (-1)^3 + \dots + (+1)^n$ اگر n عددی زوج باشد حاصل برابر کدام یک از گزینه هاست؟

۴ به مقدار دقیق n بستگی دارد.

۳ صفر

۲ -۱

۱ +۱

۲۴ در تساوی $3 = (\square, 51)$ ، در جای خالی، چند عدد دو رقمی بزرگ‌تر از ۵۱ می‌توان قرار داد؟

۱۶ (۴)

۳ (۳)

۵۰ (۲)

۴۸ (۱)

۲۵ اگر $A = 3 - \frac{2}{3 - \frac{2}{3 - \frac{2}{\dots}}}$ و $B = \frac{A}{2} + \frac{1}{A}$ و $C = \frac{B-2}{3}$ باشد، C کدام است؟

-۱/۶ (۴)

-۲/۳ (۳)

۲/۳ (۲)

۵/۶ (۱)

۲۶ a و b دو عدد اول هستند؛ $[a, b]$ چند شمارنده مثبت دارد؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۲۷ به جای مربع، چند عدد کم‌تر از ۲۰ می‌توان قرار داد؟

$(\square, 4) = 1$

۸ (۴)

۱۱ (۳)

۱۰ (۲)

۹ (۱)

۲۸ حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$1 \frac{1}{15} + 2 \frac{2}{15} + 3 \frac{3}{15} + \dots + 15 \frac{15}{15} = ?$$

۴۱۲ (۴)

۱۲۸ (۳)

۲۲۵ (۲)

۶۴ (۱)

۲۹ فرض کنید x و y اعداد صحیح دلخواهی باشند. کدام گزینه حتماً یک عدد گویا است؟

$\frac{x+y}{2x-y}$ (۴)

$\frac{x+y}{x-y}$ (۳)

$\frac{y}{x^2+1}$ (۲)

$\frac{x}{x+y}$ (۱)

۳۰ حاصل عبارت $\frac{1}{100} + \frac{4}{200} + \frac{9}{300} + \frac{16}{400} + \frac{25}{500} + \frac{36}{600}$ ، کدام است؟

- ۱) ۰٫۲۱ ۲) $\frac{91}{60}$ ۳) ۰٫۰۱ ۴) $\frac{173}{600}$

۳۱ مجموع دو عدد اول ۴۹ است. تفاضل این دو عدد مضرب کدام عدد است؟

- ۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۱۵ ۴) ۱۴

۳۲ اگر حاصل ضرب اعداد طبیعی ۱ تا n را با $n!$ نمایش دهیم، حاصل عبارت $\frac{5}{6!} + \frac{6}{7!} + \dots + \frac{19}{20!}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{6!} - \frac{1}{20!}$ ۲) $\frac{1}{5!} - \frac{1}{20!}$ ۳) $\frac{1}{5!} - \frac{1}{19!}$ ۴) $\frac{1}{6!} - \frac{1}{19!}$

۳۳ در شکل زیر، شکل بزرگتر هشت ضلعی منتظم و شکل کوچکتر درون هشت ضلعی، لوزی است. زاویه A چند درجه است؟

- ۱) 30° ۲) 45° ۳) 60° ۴) 75°

۳۴ چه تعداد از عبارت‌های زیر نادرست است؟

(الف) هر دوزنقه یک متوازی‌الاضلاع است.

(ب) قطرهای هر مستطیل با هم برابر و بر هم عمودند.

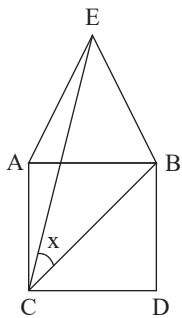
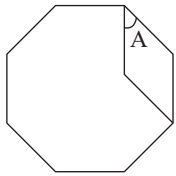
(ج) هر لوزی ۴ خط تقارن دارد.

(د) زوایای روبه‌رو به هم در هر متوازی‌الاضلاع، با هم برابرند.

- ۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۵ در شکل زیر x کدام است؟ ($ABDC$ مربع و ABE متساوی‌الاضلاع است.)

- ۱) 25° ۲) 30° ۳) 35° ۴) 40°



۳۶ م.م.م کدام جفت از اعداد زیر از سایر گزینه‌ها کوچکتر است؟

- ۱) (۲۰۰۰, ۱۰۷۸) ۲) (۷۲۹, ۱۴۴) ۳) (۱۲۱۰, ۴۳۷۵) ۴) (۲۸۰, ۲۶۴)

۳۷ تعداد جفت اعداد اول دو قلوی بین ۱ تا ۷۰ را a نامیده و تعداد اول سه قلوی بین ۱ تا ۳۰۰ را b می‌نامیم. $a - b$ کدام است؟

- ۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) ۶

۳۸ چه تعداد از عبارت‌های زیر اعداد اول هستند؟

$$A = 7^{139} + 9^{61}$$

$$B = -2^{69} + 6^{81}$$

$$C = 3^{51} + 5^{17}$$

$$D = 3^{81} \times 1397^{63}$$

- ۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۹ اگر m و n دو عدد اول فرد باشند، چه تعداد از روابط زیر ممکن است عدد اول باشند؟

الف) $m + n$ ب) $m - n$

ج) $m \times n$ د) m^n ه) $m^2 - n^2$

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۴۰ اگر $\frac{a}{b} = ۰٫۳۵$ و $(a, b) = ۳$ باشد، حاصل $۲a + b$ کدام است؟ ($a, b \in \mathbb{N}$)

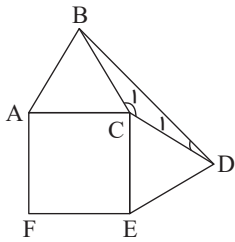
۱۰۲ (۴)

۱۶۲ (۳)

۴۰۵ (۲)

۸۱ (۱)

۴۱ در شکل زیر مثلث‌های ABC و CDE متساوی‌الاضلاع هستند. هم‌چنین چهار ضلعی $ACEF$ مربع است. زاویه D_1 چند درجه است؟



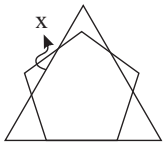
۳۰° (۱)

۱۵° (۲)

۴۵° (۳)

۲۲٫۵° (۴)

۴۲ شکل زیر یک پنج ضلعی منتظم و یک مثلث متساوی‌الاضلاع است. اندازه زاویه x چه قدر است؟



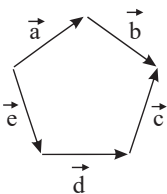
۴۸° (۲)

۳۶° (۱)

۳۰° (۴)

۲۴° (۳)

۴۳ کدام رابطه برای شکل زیر درست است؟



$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{e} + \vec{d}$ (۲)

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} = \vec{0}$ (۱)

$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$ (۴)

$\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} - \vec{d} - \vec{e} = \vec{0}$ (۳)

۴۴ شکل زیر به ترتیب چند مرکز تقارن و چند خط تقارن دارد؟



صفر - بی‌شمار (۲)

صفر - ۳ (۱)

۱ - بی‌شمار (۴)

۳ - ۱ (۳)

۴۵ برای تساوی زیر، چند عدد کوچک‌تر از ۵۰ می‌توان پیدا کرد؟

$(\square, ۶) = ۱$

۱۷ (۴)

۱۶ (۳)

۱۸ (۲)

۱۵ (۱)

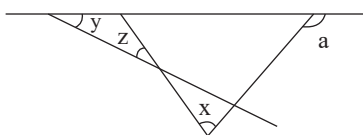
۴۶ اگر روش غربال اعداد را برای اعداد ۲۳ تا ۱۴۷ انجام دهیم، مجموع ارقام آخرین عددی که خط می‌خورد چند است؟

۹ (۴)

۱۶ (۳)

۸ (۲)

۱۳ (۱)



۴۷ با توجه به شکل زیر، کدام رابطه درست است؟

$x = y + a - z$ (۲)

$x = a - y + z$ (۱)

$x = a - y - z$ (۴)

$x = y + z - a$ (۳)

۴۸ اگر m و n اعداد اول باشند، کدام گزینه می‌تواند عددی اول باشد؟

$m \times n + n + m$ (۴)

$m \times n + n$ (۳)

$m \times n + m$ (۲)

$m \times n$ (۱)

۴۹ اگر $\vec{a} = \begin{bmatrix} -۴ \\ ۲ \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} k+۳ \\ ۳k-۲ \end{bmatrix}$ و بردار $\vec{a} + \vec{b}$ در جهت محور عرض‌ها باشد، بردار $۲\vec{a} - ۳\vec{b}$ کدام است؟

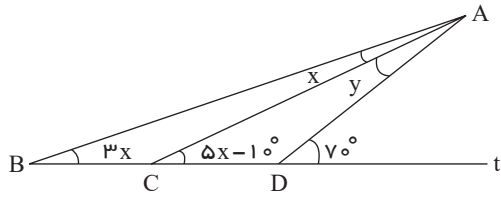
$\begin{bmatrix} -۸ \\ ۲۱ \end{bmatrix}$ (۴)

$\begin{bmatrix} ۸ \\ ۱۲ \end{bmatrix}$ (۳)

$\begin{bmatrix} ۲۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$ (۲)

$\begin{bmatrix} -۲۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$ (۱)

۵۰ با توجه به شکل زیر، حاصل $x + y$ کدام است؟

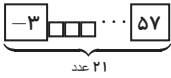


- ۳۰° (۲)
- ۴۰° (۴)

- ۲۰° (۱)
- ۳۵° (۳)

پاسخنامه تشریحی

۱ ۲ ۳ ۴ ۱



با توجه به فوق، چون ۲۱ عدد داریم، پس یکی کم تر، یعنی ۲۰ فاصله مساوی بین اعداد ایجاد می شود. به طور مثال وقتی ۶ عدد داریم، ۵ فاصله مساوی درست می شود. برای به دست آوردن فاصله بین هر دو عدد کافی است فاصله عدد آخر از اول یعنی ۵۷ از (-۳) را به دست آورده و بر تعداد فاصله ها یعنی ۲۰، تقسیم کنیم.

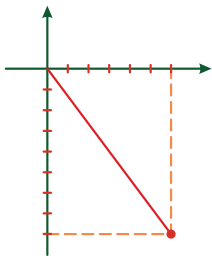
$$\text{فاصله بین هر دو عدد} = \frac{57 - (-3)}{20} = \frac{60}{20} = 3$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲ ابتدا عدد ۱ را خط می زنیم. سپس همه مضارب ۲ را خط می زنیم. تعداد این اعداد ۴۹ تا ست. سپس شروع به حذف مضارب ۳ می کنیم. اعدادی که بر ۶ بخش پذیر هستند، قبلاً خط خورده اند.

پس اعداد ۱۵، ۹، ۲۱، ۲۷، ۳۳، ۳۹، ۴۵، ۵۱، ۵۷، ۶۳، ۶۹، ۷۵، ۸۱، ۸۷، ۹۳ و ۹۹ در این مرحله خط می خورند. (این اعداد ۶ تا ۶ تا زیاد شده اند. ۶۲امین عدد با توجه به این که قبلاً تعداد ۵۰ عدد خط خورده بود، عدد ۷۵ خواهد بود.)

۱ ۲ ۳ ۴ ۳

ابتدا نقطه‌ی داده شده را می یابیم. سپس با استفاده از مثلث قائم الزاویه‌ی تشکیل شده اعداد ۶ و ۸ و ۱۰ که مضارب ۳ و ۴ و ۵ هستند را بدست می آوریم. بنابراین فاصله‌ی نقطه تا مبدأ ۱۰ است و فاصله‌ی آن تا محور طولها ۸ واحد است. پس می دانیم که فاصله همواره مثبت در نظر گرفته می شود.



$$\frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1,25$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{48} - \frac{1}{50} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{51} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \dots - \frac{1}{48} + \frac{1}{48} - \frac{1}{50} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} + \dots - \frac{1}{49} + \frac{1}{49} - \frac{1}{51} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{50} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{51} \right) = \frac{48}{2 \times 100} - \frac{48}{2 \times 3 \times 51} = \frac{6}{25} - \frac{8}{51} \\ &= \frac{6 \times 51 - 8 \times 25}{25 \times 51} = \frac{306 - 200}{25 \times 51} = \frac{106}{25 \times 51} \end{aligned}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ کوچک ترین عدد صحیح منفی چهار رقمی زوج عدد (-۹۹۹۸) و بزرگ ترین عدد صحیح منفی سه رقمی مضرب ۳، (-۱۰۲) است. بنابراین برای به دست آوردن مجموع آن ها داریم:

$$(-9998) + (-102) = -10100$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶ ابتدا از عدد ۳ فاکتور می گیریم:

$$\begin{aligned} & 3(34 + 35 + 36 + \dots + 100) \\ &= 3 \left(\frac{101 \times 100}{2} - \frac{33 \times 34}{2} \right) = 3(5050 - 561) = 13467 \end{aligned}$$

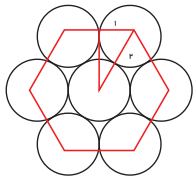
۱ ۲ ۳ ۴ ۷

$$\left. \begin{array}{l} \text{دو طرف عبارت بالا را با دو طرف} \\ \text{عبارت پایین جمع می کنیم} \end{array} \right\} \rightarrow 3A = 3 \rightarrow A = \frac{3}{4} < \frac{3}{4} < \frac{3}{4} < \frac{4}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} < A < 1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸

$$\left. \begin{array}{l} a = -(-b) = b \\ b = -(-c) = c \\ -(-c) = d \Rightarrow c = d \end{array} \right\} \Rightarrow a = b = c = d \Rightarrow a + c \text{ قرینه} = -(a + c) = -2a, b + d - 4c = a + a - 4a = -2a$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۹ از متصل کردن مراکز دایره های بیرونی یک ۶ ضلعی منتظم به دست می آید که فاصله مرکز شش ضلعی از هر کدام از رئوس آن برابر با ۲ سانتی متر است. کافی است فاصله مرکز تا یکی از اضلاع ۶ ضلعی را محاسبه کنیم. در واقع کافی است ارتفاع مثلث متساوی الاضلاعی به طول ضلع ۲ سانتی متر را با استفاده از قضیه فیثاغورس محاسبه کنیم:



$$(1^2 - 1^2) = x^2$$

$$x = \sqrt{3}$$

تعداد اضلاع را n در نظر می‌گیریم. ابتدا باید هر زاویه داخلی و مکملش را بر حسب n به دست آورده، سپس معادله تشکیل دهیم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰**

$$\text{هر زاویه داخلی} = \frac{n-2}{n} \times 180^\circ = A$$

$$\text{مکمل زاویه داخلی} = 180^\circ - \left(\frac{n-2}{n} \times 180^\circ\right) = 180^\circ - A$$

$$4 \times (180^\circ - A) + 3 \times 0^\circ = A \Rightarrow 720^\circ - 4A + 3 \times 0^\circ = A$$

$$\Rightarrow 5A = 720^\circ \Rightarrow A = 144^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{n-2}{n} \times 180^\circ = 144^\circ \Rightarrow \frac{n-2}{n} = \frac{144^\circ}{180^\circ} \Rightarrow 180^\circ n - 360^\circ = 144^\circ n \Rightarrow n = 12$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{99}\right) = \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \times \dots \times \frac{\cancel{98}}{99} = \frac{1}{99}$$

همان‌طور که مشخص است مخرج هر کسر با صورت کسر بعدی ساده می‌شود.

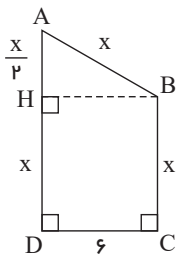
کمترین فاصله زمانی اتفاق می‌افتد که حسین دقیقاً بر روی رأس متساوی‌الساقین قرار گرفته باشد که سعید و تیرک دروازه دو رأس دیگر آن باشند. عرض زمین **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲**

۴۰ متر است بنابراین نیمی از آن ۲۰ متر خواهد بود. بنابراین فاصله تیرک دوم دروازه از سعید برابر با ۲۴ متر است. بنابراین قاعده مثلث متساوی‌الساقین ۲۴ متر است. حال کافی است طول ساق را با استفاده از فیثاغورس محاسبه کنیم.

$$12^2 + 5^2 = x^2$$

$$x = 13$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳



از رأس B ، بر ضلع مقابلش، پاره‌خط BH را عمود رسم می‌کنیم. به این ترتیب در مثلث قائم‌الزاویه ABH داریم:

$$AB^2 - AH^2 = BH^2$$

$$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 6^2 \Rightarrow \frac{3}{4}x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = \frac{36 \times 4}{3} = 48 \Rightarrow x = \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$$

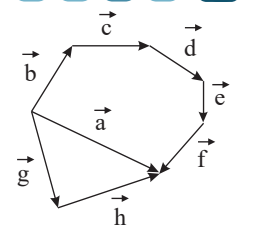
محیط شکل: $AD + DC + BC + AB$

$$= \frac{3}{4}x + 6 + x + x = \frac{3}{4}x + 6 + \frac{3}{4}x + 6 = \frac{3}{2}x + 12 = 12\sqrt{3} + 12$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴

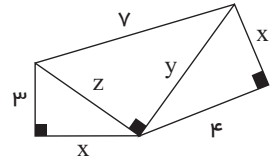
$$\vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} + \vec{f} = \vec{a}, \quad \vec{g} + \vec{h} = \vec{a}$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} + \vec{f}) + (\vec{g} + \vec{h}) = \vec{a} + \vec{a} + \vec{a} = 3\vec{a}$$



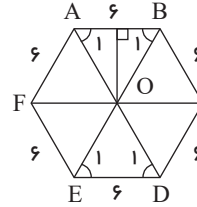
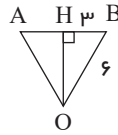
با استفاده از رابطه فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویه داریم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵**

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 49 \\ y^2 = 16 + x^2 \\ z^2 = 9 + x^2 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{(16 + x^2)}_{y^2} + \underbrace{(9 + x^2)}_{z^2} = 49 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$$



مجموع زوایای داخلی ۶ ضلعی منتظم برابر $720^\circ = (6-2) \times 180^\circ$ و هر زاویه برابر $120^\circ = \frac{720^\circ}{6}$ می‌باشد. در شکل زیر هر ۶ مثلث باهم مشابه و

متساوی‌الاضلاع هستند.



حال یک مثلث را بیرون می‌آوریم: C

طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$3^2 + (OH)^2 = 6^2 \Rightarrow OH^2 = 27 \Rightarrow OH = \sqrt{27}$$

$$\text{مساحت یک مثلث} = \frac{\sqrt{27} \times 6}{2} = 3 \times \sqrt{27}$$

$$\text{مساحت شش ضلعی} = 6 \times (3 \times \sqrt{27}) = 18 \times \sqrt{27}$$

۱) مخرج همه‌ی گزینه‌ها ۴۶۰۰ می‌باشد پس از طریق تناسب $\frac{41}{100} = \frac{x}{4600}$ صورت را پیدا می‌کنیم.

$$0,41 = \frac{41}{100} = \frac{x}{4600}$$

$$x = 1886$$

در یک ستون اعداد مشخص شده است. ابتدا حاصل آن را پیدا می‌کنیم و در جدول سطر و ستون‌ها مجموع برابری دارند. از حل معادله مقادیر a و b را می‌یابیم.

۴	+۲	b
-۶	-۲	
۸	a	

$$\begin{aligned} 1) 4 + (-6) + 8 &= 6 \\ 2) 4 + 2 + b &= 6 \Rightarrow b = 0 \\ 3) 2 - 2 + a &= a = 6 \\ 4) 2a - b &= 2 \times 6 - 0 = 12 \end{aligned}$$

۱۹) برای مقایسه‌ی کسرها ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم.

$$1) \frac{4}{10} = \frac{616}{1540}$$

$$2) \frac{9}{20} = \frac{693}{1540}$$

$$3) \frac{2}{7} = \frac{440}{1540}$$

$$4) \frac{5}{11} = \frac{700}{1540}$$

$$\frac{5}{11} > \frac{9}{20} > \frac{4}{10} > \frac{2}{7}$$

$$A = \frac{2}{5} \times \left(\frac{9-2}{12}\right) \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{2} \times \frac{3}{2}\right) = \frac{2}{5} \times \frac{7}{12} \times \frac{13}{2} = \frac{7 \times 13}{15 \times 12}$$

$$12A = \frac{7 \times 13}{15} = \frac{91}{15}$$

$$\frac{-3}{\left(\frac{-2}{5}\right)} \times \frac{(-24) \times \left(\frac{2}{6}\right) + 4}{(-8) \times \left(\frac{3}{4}\right) - 2} = \frac{-3}{\left(\frac{-2}{5}\right)} \times \frac{-8 + 4}{-6 - 2} = \frac{30}{7} \times \frac{4}{8} = \frac{15}{7}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{4 \times 6} + \dots + \frac{1}{98 \times 100} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \dots + \frac{1}{98} \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{100}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{99} + \frac{1}{98} - \frac{1}{100}\right) \end{aligned}$$

دقت کنید به غیر از اعداد $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, (-\frac{1}{99}), (-\frac{1}{100})$ بقیه کسرها به صورت ۲ تایی قرینه یکدیگرند که حاصل جمع صفر دارند. در نتیجه:

$$\text{عبارت} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{6} - \frac{100 + 99}{9900} \right) = \frac{5}{2 \times 6} - \frac{199}{99 \times 200}$$

با توجه به این که n عددی زوج است $+1$ ها با -1 یکسان است، لذا حاصل صفر می‌شود. (۱) (۲) (۳) (۴) (۲۳)

چون $51 = 3 \times 17$ ، باید به دنبال اعدادی بین ۱۸ تا ۳۳ بگردیم که با ۱۷ عامل مشترک نداشته باشد و مضارب ۳ آن را می‌توان در جای خالی قرار داد چون هیچکدام از اعداد صحیح ۱۸ تا ۳۳ با ۱۷ عامل مشترک ندارد پس تعداد برابر است با: (۱) (۲) (۳) (۴) (۲۴)

$$33 - 18 + 1 = 16$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۲۵)

$$A = 3 - \frac{2}{3 - \frac{2}{3 - \frac{2}{\dots}}} \Rightarrow A = 3 - \frac{2}{A} \Rightarrow A + \frac{2}{A} = 3 \xrightarrow{\times A} \frac{A^2}{A} + \frac{2}{A} = \frac{3}{1} \Rightarrow B = \frac{3}{2} \Rightarrow C = \frac{\frac{3}{2} - 2}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{4}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{-1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۲۶)

$$[a, b] \times (a, b) = a \times b$$

و چون a و b هر دو اول هستند، پس $(a, b) = 1$

$$\Rightarrow [a, b] = a \times b$$

شمارنده‌های $[a, b]$: $1, a, b, ab$

پس $[a, b]$ چهار شمارنده مثبت دارد.

اعدادی باید به جای مربع قرار داد که نسبت به ۴ اول باشند. (ب.م.م آن‌ها با ۴ برابر ۱ باشد) همه اعداد کم‌تر از ۲۰ که نسبت به ۴ اول هستند برابرند با: (۱) (۲) (۳) (۴) (۲۷)

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19$$

پس ۱۰ عدد می‌توان به جای مربع قرار داد.

(۱) (۲) (۳) (۴) (۲۸)

$$1 \frac{1}{15} + 2 \frac{2}{15} + 3 \frac{3}{15} + \dots + 15 \frac{15}{15} =$$

$$(1 + 2 + 3 + \dots + 15) + \left(\frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{3}{15} + \dots + \frac{15}{15} \right) =$$

$$\frac{15 \times 16}{2} + \frac{1 + 2 + 3 + \dots + 15}{15} = 15 \times 8 + \frac{15 \times 8}{15} = (15 \times 8) + 8 = 120 + 8 = 128$$

اعداد گویا به شکل $\frac{a}{b}$ هستند که a و b یعنی صورت و مخرج کسر، عدد صحیح و $b \neq 0$ است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۲۹)

چون x و y اعداد صحیح هستند، پس صورت و مخرج هر ۴ گزینه حتماً صحیح هستند. فقط باید دید در کدام گزینه هیچ وقت مخرج صفر نمی‌شود.

در گزینه ۱: اگر x و y قرینه هم باشند، آن گاه $x + y = 0$ و مخرج صفر می‌شود. پس گزینه ۱ می‌تواند گویا نباشد.

در گزینه ۳: اگر x و y مساوی باشند، آن گاه $x - y = 0$ و مخرج صفر می‌شود. پس گزینه ۳ می‌تواند گویا نباشد.

در گزینه ۴: اگر عدد y دو برابر عدد x باشد آن گاه $2x - y = 0$ می‌شود و مخرج صفر می‌شود. پس این گزینه هم می‌تواند گویا نباشد.

در گزینه ۲: مخرج همواره بزرگتر یا مساوی یک است زیرا برای هر عدد صحیح x ، x^2 نامنفی است؛ پس $(x^2 + 1)$ همواره بزرگتر یا مساوی یک است. پس مخرج صفر نمی‌تواند باشد. (۱) (۲) (۳) (۴) (۳۰)

$$\frac{1}{100} + \frac{4}{200} + \frac{9}{300} + \frac{16}{400} + \frac{25}{500} + \frac{36}{600}$$

$$= \frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \frac{3}{100} + \frac{4}{100} + \frac{5}{100} + \frac{6}{100}$$

$$= \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{100} = \frac{21}{100} = 0,21$$

از آن جا که مجموع دو عدد، فرد شده است، پس یکی از آن‌ها فرد و دیگری زوج است. تنها عدد اول زوج برابر ۲ است. پس: (۱) (۲) (۳) (۴) (۳۱)

$$45 - 2 = 47 \Rightarrow \text{تفاضل} : 47 - 2 = 49 - 2 = 49$$

با توجه به گزینه‌ها ۴۵ تنها مضرب ۱۵ است.

$$45 = 15 \times 3$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۳۲)

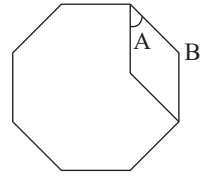
$$\frac{6-1}{6!} + \frac{7-1}{7!} + \frac{8-1}{8!} + \dots + \frac{20-1}{20!} = \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{7!} - \frac{1}{8!} + \dots + \frac{1}{19!} - \frac{1}{20!} = \frac{1}{5!} - \frac{1}{20!}$$

۳۳) هشت ضلعی منتظم است، حساب می‌کنیم: زوایای A و B دو زاویه از لوزی هستند و چون مجاور هم هستند، پس مکملند و مجموع آن‌ها 180° است. حال اندازه زاویه B را که یکی از زاویه‌های داخلی

$$\text{اندازه هر زاویه داخلی یک } n \text{ ضلعی منتظم} = \frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$$

$$\Rightarrow \hat{B} = \frac{(8-2) \times 180^\circ}{8} = \frac{6}{8} \times 180^\circ = 135^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \rightarrow \hat{A} + 135^\circ = 180^\circ \rightarrow \hat{A} = 45^\circ$$

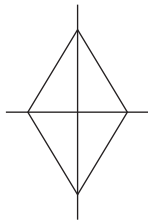


۳۴) موارد (الف، ب، ج) نادرست‌اند و تنها مورد (د) صحیح است.

مورد الف: در، دوزنقه فقط دو ضلع با هم موازیند و دو ضلع دیگر با هم موازی نیستند. پس دوزنقه متوازی‌الاضلاع نیست.

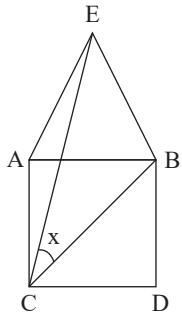
مورد ب: به‌طور کلی قطرهای مستطیل با هم برابرند ولی بر هم عمود نیستند. مربع، مستطیلی است که قطرهایش برابر و بر هم عموداند.

مورد ج: هر لوزی دو خط تقارن دارد. مربع، یک نوع خاص از لوزی است که ۴ خط تقارن دارد.



۳۵) ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۵

$$\hat{EAC} = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$$



$$AC = AB, AB = AE = EB \Rightarrow AE = AC \Rightarrow \hat{ACE} = \hat{AEC} = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ$$

$$\hat{ACB} = 45^\circ \rightarrow x = \hat{ACB} - \hat{ACE} = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$$

۳۶) هر کدام از اعداد را تجزیه کرده و ب.م.م.ها را پیدا می‌کنیم:

گزینه ۱)

$$2000 = 2^4 \times 5^3, 1078 = 11 \times 7^2 \times 2 \rightarrow (2000, 1078) = 2$$

گزینه ۲)

$$729 = 3^6, 144 = 3^2 \times 2^4 \rightarrow (729, 144) = 3^2 = 9$$

گزینه ۳)

$$4375 = 5^4 \times 7, 1210 = 2 \times 5 \times 11^2 \Rightarrow (4375, 1210) = 5$$

گزینه ۴)

$$280 = 7 \times 2^3 \times 5, 264 = 2^3 \times 3 \times 11 \rightarrow (280, 264) = 2^3 = 8$$

۳۷) طبق قسمت «خواندنی» صفحه ۲۳ کتاب درسی داریم:

دو عدد اول را که با هم دو واحد اختلاف دارند یک جفت عدد اول دو قلو می‌نامند. بنابراین داریم:

$$7 \text{ تا } 70: (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61)$$

$$\text{جفت } 7 \rightarrow a=7$$

هم‌چنین هر سه عدد فرد متوالی را که هر سه نیز اول باشند اعداد اول سه قلو می‌نامند که فقط یک سه قلو اول بین اعداد طبیعی وجود دارد. یعنی $(3, 5, 7) \leftarrow b=1$

$$\rightarrow a-b=7-1=6$$

۳۸) 7^{139} و 9^{61} اعداد فرد هستند؛ پس مجموع آن‌ها زوج است. پس A عددی مرکب است.

2^{69} و 6^{81} اعداد زوج هستند؛ پس مجموع آن‌ها زوج است. پس B عددی مرکب هستند.

۳^{۵۱} و ۵^{۱۷} اعداد فرد هستند؛ پس مجموع آن‌ها زوج است. پس C عددی مرکب است.
 نیز شمارنده‌های ۳ و ۱۳۹۷ دارد پس نمی‌توند اول باشد.
 (الف) جمع دو عدد فرد اول، عددی زوج و مرکب است.

(ب) ممکن است اول باشد: $7 - 5 = 2$

(ج) ضرب دو عدد اول؛ قطعاً عددی مرکب است.

(د) هر عددی به غیر از صفر و یک به توان عددی دیگر به جز صفر و یک برسد، قطعاً مرکب است.

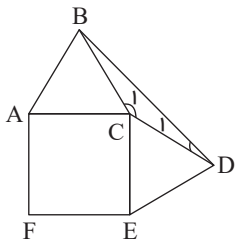
(ه) توان دوم عدد اول فرد، عددی فرد و مرکب است و تفریق دو عدد مرکب، عددی زوج و مرکب است.

ب.م.م دو عدد طبیعی a و b برابر ۳ شده است؛ پس می‌توان آن‌ها را به صورت $b = 3n, a = 3m$ نشان داد به طوری که $(m, n) = 1$ باشد.
 (۱) (۲) (۳) (۴) (۵)

$$\frac{a}{b} = \frac{3m}{3n} = \frac{m}{n} = \frac{35}{100} = \frac{7}{20} \Rightarrow m = 7, n = 20$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 21 \\ b = 60 \end{cases} \Rightarrow 2a + b = 42 + 60 = 102$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۵) با توجه به این که دو مثلث CDE, ABC متساوی‌الاضلاع هستند، هر زاویه داخلی آن‌ها 60° درجه می‌باشد. هم‌چنین در مربع نیز هر زاویه برابر 90° است.



بنابراین زاویه C_1 برابر است با:

$$90^\circ + 60^\circ + 60^\circ + \hat{C}_1 = 360^\circ \Rightarrow \hat{C}_1 = 360^\circ - 210^\circ = 150^\circ$$

در مثلث CDE ، ضلع CD برابر است از طرفی در مربع $CE = AC$ است. در مثلث ABC هم $AC = BC$ است. در نتیجه دو ضلع BC و CD برابرند، پس مثلث BCD متساوی‌الساقین است و دو زاویه کناری (ساق‌ها) با هم برابرند. پس:

$$180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

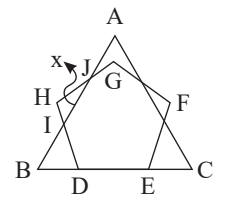
$$30^\circ = 2\hat{D}_1 \Rightarrow \hat{D}_1 = 15^\circ$$

$$\text{مجموع زاویه‌های داخلی پنج ضلعی منتظم} = (5-2) \times 180^\circ \Rightarrow = \frac{3 \times 180^\circ}{5} = 108^\circ$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۵)

بنابراین: $\hat{H} = \hat{HDE} = 108^\circ$

$$\text{در مثلث } BDI: \begin{cases} \hat{B} = 60^\circ \\ \hat{IDB} = 180^\circ - \hat{HDE} = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{BID} = 180^\circ - (60^\circ + 72^\circ) = 48^\circ$$

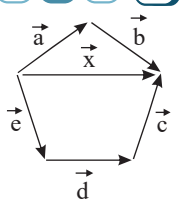


زاویه‌های BID و HIJ متقابل به رأس هستند. پس: $\hat{HIJ} = \hat{BID} = 48^\circ$

$$\begin{cases} \hat{H} = 108^\circ \\ \hat{HIJ} = 48^\circ \end{cases} \Rightarrow x = 180^\circ - (48^\circ + 108^\circ) = 24^\circ$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۵)

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= \vec{x} \\ \vec{e} + \vec{d} + \vec{c} &= \vec{x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$$

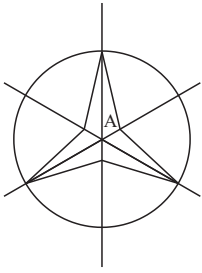


$$\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} - \vec{d} - \vec{e} = \vec{0}$$

سه خط مشخص شده در شکل خطوط تقارن هستند، اما این شکل مرکز تقارن ندارد. (۱) (۲) (۳) (۴) (۵)

توجه: نقطه (A) مرکز تقارن شکل نیست، چرا که اگر شکل را حول آن نقطه به اندازه 180° دوران دهیم.

شکل حاصل بر شکل اول منطبق نمی‌شود.



۴۵) ۱ ۲ ۳ ۴ ۵
برای اینکه تساوی $(\square, 6) = 1$ برقرار باشد، باید اعدادی را در جای خالی قرار دهیم که شمارندهٔ مشترک با $6 = 3 \times 2$ نداشته باشد. یعنی عامل اول ۲ و ۳ نداشته باشد. برای این کار می‌توانیم از غربال اعداد استفاده کنیم و اعداد با شمارنده‌های ۲ و ۳ را خط بزیم و حذف کنیم. اعدادی که در مرحله حذف مضارب ۲ خط می‌خورند.

۲۴ عدد : ۲, ۴, ۶, ۸, ..., ۴۸

اعدادی که در مرحله حذف مضارب ۳ خط می‌خورند و در مرحله قبل خط نخورده‌اند.

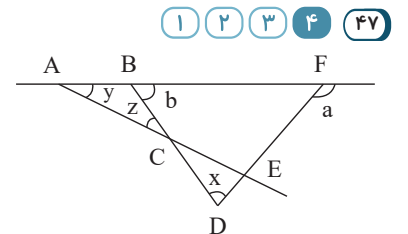
۸ عدد : ۳, ۹, ۱۵, ۲۱, ۲۷, ۳۳, ۳۹, ۴۵

بنابراین از ۴۹ عدد کوچک‌تر از ۵۰، تعداد ۳۲ عدد هستند که حاصل ب.م.م آن‌ها با ۶ برابر ۱ نمی‌شود و ۱۷ عدد باقی‌مانده مطلوب ما هستند.

۴۶) ۱ ۲ ۳ ۴ ۵
اعداد اول را پیدا کرده و مضارب آن‌ها را خط می‌زنیم و مجذور آخرین عدد اولی که مضارب آن را خط می‌زنیم باید بین اعداد باشد. آخرین اعدادی که خط می‌خورند مضارب ۱۱ هستند که در مراحل قبلی خط نخورده‌اند. اعداد ۱۲۱ و $11 \times 13 = 143$ پس آخرین عددی که خط می‌خورد ۱۴۳ است.

$$1 + 4 + 3 = 8$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC : b = y + z \\ \triangle BDF : a = b + x \end{array} \right\} \Rightarrow a = y + z + x \Rightarrow x = a - y - z$$



۴۸) ۱ ۲ ۳ ۴ ۵
 $m \times n$ عددی مرکب است.

$m \times n$ مضربی از m است پس $m \times n + m = m \times (n + 1)$ نیز مضربی از m است.

$m \times n$ مضربی از n است، پس $m \times n + n = n \times (m + 1)$ نیز مضربی از n است.

$(m \times n + n + m)$ می‌تواند اول باشد. برای مثال به ازای $m = 2$ و $n = 3$ حاصل عدد ۱۱ می‌شود که عددی اول است.

۴۹) ۱ ۲ ۳ ۴ ۵
برای آن که بردار $\vec{a} + \vec{b}$ در جهت محور عرض‌ها باشد، باید مؤلفهٔ اول آن صفر باشد، پس داریم:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k+3 \\ 3k-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} \Rightarrow -4 + (k+3) = 0 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow \vec{b} = \begin{bmatrix} 1+3 \\ 3 \times (1) - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$2\vec{a} - 3\vec{b} = 2 \times \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} - 3 \times \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ 1 \end{bmatrix}$$

۵۰) ۱ ۲ ۳ ۴ ۵
زاویهٔ \hat{ACD} زاویهٔ خارجی مثلث ABC است، بنابراین:

$$\hat{ACD} = \hat{ABC} + \hat{BAC} \Rightarrow 5x - 10^\circ = 3x + x \Rightarrow x = 10^\circ$$

از طرفی زاویهٔ \hat{ADt} زاویهٔ خارجی مثلث ABD است. در نتیجه:

$$\hat{ADt} = \hat{BAD} + \hat{ABD} \Rightarrow 70^\circ = 30^\circ + 10^\circ + y \Rightarrow y = 30^\circ$$

بنابراین:

$$x + y = 10^\circ + 30^\circ = 40^\circ$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴

۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴

۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴
۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴

۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	۴
۴۴	۱	۲	۳	۴
۴۵	۱	۲	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	۴
۴۷	۱	۲	۳	۴
۴۸	۱	۲	۳	۴
۴۹	۱	۲	۳	۴
۵۰	۱	۲	۳	۴